

Introducción
al estudio
DE LAS
Vibraciones
Mecánicas
7
R. F. STEIDEL JR.
0
1
2
3
4
CECSA

# INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECANICAS

ROBERT F. STEIDEL, JR.

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.
MEXICO

Título original en inglés:
AN INTRODUCTION TO MECHANICAL VIBRATIONS

Traducido por:
Ing. JAVIER FLORES BARRIOS

Edición autorizada por:
TRANS-EDITIONS, INC., a Division of
JOHN WILEY & SONS, Inc.,



Library of Congress Cataloging in Publication Data:

ISBN 0-471-82083-0

Cuarta impresión
marzo de 1991



ISBN 968-26-0244-0



COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 5022, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO

PRINTED IN MEXICO

# Junta de Consejeros, Ingeniería

# PREFACIO

En el prefacio a la primera edición, expuse mis razones para escribir un texto más acerca de la vibración, así como mi modo de pensar sobre la enseñanza de las vibraciones mecánicas. En realidad el enseñar esta materia ha tenido su efecto en la disposición algo inusitada de los temas en el libro. Desde que se publicó esa primera edición del libro, no ha cambiado mi manera de pensar sobre dicha enseñanza. Por ejemplo, todavía creo firmemente que el incorporar el tema de amortiguación antes del Cap. 6, constituye un error pedagógico.

Como campo, la vibración mecánica no ha variado mucho a partir de la primera edición. Tal vez existe en la actualidad un mayor interés por los sistemas de grado múltiple de libertad, pero esto mismo hace aún más necesaria la completa comprensión de los pricipios básicos. La vibración aleatoria también ha aumentado en importancia, como podía haberse pronosticado. La única fuente de vibración aleatoria es el motor de cohete, de manera que las aplicaciones de esta vibración se encuentran inevitablemente ligadas al programa espacial. Al declinar este programa, ha declinado también nuestro interés en la vibración aleatoria.

No existen grandes cambios que anunciar en esta edición, pero sí existen varios cambios menores. Por ejemplo, se ha ampliado la explicación sobre la amortiguación de histéresis, así como la colección de problemas. Si se hace una comparación entre las dos ediciones, se notará que he añadido cerca de 50 problemas nuevos, y he omitido los que han dejado de ser útiles. En particular, se encuentran ahora más problemas sobre vibración no lineal. Sigo convencido de que el aprendizaje acerca de la vibración mecánica, se logra en su mejor forma mediante la resolución de problemas.

En toda esta edición se utiliza el Sistema Internacional (S.I.) de unidades. Ha existido considerable controversia acerca de cuáles unidades deben usarse en el estudio de la vibración mecánica, mucha más de la que el caso amerita. Ya que las relaciones de amortiguacion, las relaciones de frecuencia, y las relaciones de amplitud son adimensionales, en realidad no importan las unidades utilizadas. La mayor parte de las mediciones de vibración se hacen en mm y se registran en gráficas de cinta que se mueven a velocidades calibradas en mm/s. Las lecturas de oscilógrafo se calibran en milímetros. Me ha parecido lógico el Sistema de unidades S.I. y, en esta edición he abandonado las unidades convencionales, en favor de las unidades S.I.

El tema de la vibración torsional (ahora Cap. 9), se ha separado del tema de los sistemas discretos (Cap. 10). He incluido ambos temas de un capítulo extenso de la edición anterior, porque pienso que la obra previa de Holzer y W. Kerr Wilson constituye un valioso antecedente de grado múltiple de libertad. Estos investigadores realizaron un gran trabajo sin el uso de las computadoras modernas. Creo que el método de Holzer, aunque arcaico, constituye un preludio de los métodos numéricos actuales. Es útil cierto antecedente histórico para aprender a manejar sistemas múltiples de hombre. En la actualidad, este punto ha quedado establecido, no hay necesidad de redundar sobre el mismo. El Cap. 9 puede incluirse o excluirse, según el maestro o instructor lo consideren conveniente.

Quedo en deuda, en la presente edición, con el profesor Jerald Henderson, de la Universidad de California, Davis y con el profesor C. Daniel Mote, Jr. de Berkeley, los que, como amigos personales, me han proporcionado todas las ideas y opiniones para este libro, que sólo los amigos personales pueden proporcionar. Sus críticas han sido invalorables. Deseo expresar mis gracias al profesor Díaz-Jiménez de la Universidad de América en Bogotá, Colombia. El y yo hemos sostenido una detallada correspondencia sobre problemas específicos, y he aprendido de él. Es gracias a sus convincentes cartas, que se han omitido del libro muchos de mis más ambiguos problemas. Confío en que los que reemplazan a aquellos sean de mayor utilidad.

Recomiendo se lea el primer prefacio, y espero le sean gratas sus experiencias en la vibración mecánica.

*Berkeley, California,* 1978 — ROBERT F. STEIDEL, JR.

# PREFACIO A LA PRIMERA EDICION

Al preparar un prefacio para un texto introductorio al estudio de la vibración mecánica, supuse que la cuestión más importante a tener en mente era: ¿Por qué debe hacerse otro texto más sobre la vibración mecánica? Mi razón para escribir es sencilla. Tengo gran respeto y admiración para los muchos excelentes libros y monografías sobre el tema de las vibraciones mecánicas, pero ninguno de ellos se ajusta a la vista del campo que yo he experimentado. Mi único recurso ha sido tratar de desarrollar un texto a mi modo personal, con la esperanza de que los demás lo vean como yo, y que aquellos que no lo hagan, toleren un intento un poco diferente.

Según creo, existen dos bases para el estudio de la vibración mecánica. Normalmente, los sistemas mecánicos no se proyectan para resistir la vibración. Se presentan ciertas excepciones, como en el caso del diseño de aeronaves, pero la vibración se considera por lo general como un problema al que hay que hacer frente una vez que ocurre. Si éste no ocurre, se le ignora. Como consecuencia, la experiencia con la vibración es solución de problemas, y el aprender a resolver problemas de vibración constituye, por tanto, la primera fase. La segunda fase de estudio se debe a que el ingeniero en vibraciones no sólo debe resolver problemas, sino también debe explicar éstos. La literatura abunda en casos históricos de desastre, de diagnosis, y de triunfo final. La interrogante siempre presente es: ¿"Por qué"? El ingeniero debe explicar por qué debe modificarse la estructura o sistema, cambiarse el material, o cambiarse la velocidad, y por qué se elevan los costos. El explicar a los demás es una parte importante de las obligaciones del ingeniero en vibración. La explicación requiere un acercamiento claro, conciso y sencillo al problema.

Tengo tres objetivos principales al organizar una introducción al estudio de las vibraciones mecánicas. El primero consiste en insistir en problemas y ejemplos. Este libro es más una colección de problemas con un texto que los acompaña, que lo contrario. Me gustaría que se le considerara de esta manera. Mi convicción educativa es que el aprendizaje se realiza en su mejor forma mediante la resolución de problemas, sobre lo que ya he hecho hincapié. La mayor parte de los estudiantes de ingeniería aprende mejor cuando tiene un buen instructor en el salón de clase y un buen texto para acompañarlo en las oscuras horas de la noche y algunos buenos problemas que lo obliguen a pensar. Estos problemas deben analizarse hasta obtener una respuesta. No es po-

sible generalizar y dejar a otra persona las operaciones numéricas. La sociedad no sólo hace responsable al ingeniero de su trabajo, sino que también lo hace jurídicamente responsable de sus errores. De hecho, está acercándose cada vez más a ser cierta la posibilidad de ir a prisión por una práctica errónea de la ingeniería. Lo anterior pone un énfasis adicional en la obtención de soluciones a los problemas reales.

Mi segundo objetivo es insistir sobre los conceptos. La vibración mecánica no es un tema autoevidente. Tiene un lenguaje propio, y los más de los ingenieros son muy rigurosos en su semántica. A menos que los conceptos sean firmes, ni siquiera se pueden estudiar los problemas sobre vibración mecánica, y mucho menos resolverlos. Los conceptos tales como coordenadas, frecuencia y frecuencias características, modos, amortiguación, base y amplitud, vibración transitoria y permanente, son todos muy sencillos, pero con frecuencia se descuidan en favor de los temas más sofisticados de estabilidad, vibración aleatoria, etc. Mi experiencia ha sido que los ingenieros mecánicos y civiles de mayor antigüedad, han oído o leído acerca de estas cosas, pero que no las comprenden.

El tercer objetivo consiste en proporcionar una consideración especial a la disipación de energía o amortiguación en los sistemas de ingeniería mecánica. Se acepta en general que la amortiguación es viscosa, pero en la ingeniería mecánica sólo existen dos ejemplos comunes de amortiguación viscosa, uno de los cuales es el flujo laminar de un fluido a través de una ranura, y el otro es el flujo laminar de un fluido a través de un orificio. Todas las otras formas de amortiguación se consideran como cualquier otra cosa, y el porqué un texto debe lanzarse de cabeza a un estudio de la amortiguación viscosa en su primer capítulo, me ha sido particularmente asombroso. Otro problema relativo a la amortiguación, es si ésta debe incluirse cuando se considera más de un grado de libertad. Me inclino por la no inclusión, ya que ésta añade poco a una explicación y sí añade mucha complicación. En la mayor parte de las estructuras, la amortiguación es en extremo leve, menos del 5% de la amortiguación crítica, y se puede despreciar posiblemente, excepto en la resonancia.

Los primeros ocho capítulos constituyen una introducción razonable al estudio de las vibraciones mecánicas, y deben formar una base razonable para un curso de un trimestre, en diez semanas. El libro está dispuesto de manera que si se utiliza una semana para cada uno de los capítulos, hasta el Cap. 6 y dos semanas para cada uno de los Caps. 7 y 8, se conducirá al estudiante a través de las vibraciones libres y forzadas, amortiguadas y sin amortiguación, y dentro de un estudio de los sistemas con dos grados de libertad. No es necesario estudiar más de dos grados de libertad para introducir los conceptos de varios grados de libertad. Se puede aprender tanto del estudio de dos grados de libertad como del de diez, y con mayor facilidad.

Los Caps. 9 y 10 consideran más de dos grados de libertad, así como las técnicas para resolver los problemas relativos. Estos capítulos se incluyeron bajo una consideración posterior, por sugerencia del revisor y del editor. Yo no los incluiría en un curso de un trimestre para no graduados, pero sí lo haría para estudiantes graduados, o si se dispusiera de un tiempo más prolongado, tal como un semestre de 14 semanas. La enseñanza es una cosa muy personal, y comprendo que otros piensen que es necesario incluir estos temas. Si se dispusiera de mayor tiempo, yo destinaría por lo menos tres semanas para el Cap. 9, y una para el Cap. 10.



Cada uno de los primeros ocho capítulos contiene dos o tres secciones. Cada sección está proyectada para el periodo de una clase, y se sigue por un número de problemas basados en la misma. He encontrado que cinco problemas por semana proporcionan una asignación amplia. Una asignación mayor, disminuye el aprendizaje. No he discriminado entre problemas difíciles o fáciles, principalmente porque no puedo hacer este juicio. Lo que es difícil para un estudiante, es fácil para otro. Existe un manual de soluciones, que contiene la resolución para todos los problemas, y que está disponible para los instructores.

Desearía expresar mi gratitud a cinco personas que ayudaron a formar mis ideas con respecto a la vibración mecánica. La primera de ellas es mi instructor en la Universidad de Columbia, el profesor Dudley Fuller, quien me inició en el estudio de la vibración mecánica. La segunda es mi antiguo instructor y presidente de departamento en Berkeley, Clyne F. Garland, quien en su modo calmado y eficiente, me enseñó el valor de su estudio meticuloso en los problemas de ingeniería. Esto es algo que aún no he dominado. J. Lathrop Meriam, el antiguo decano de ingeniería de la Duke University, quien fue también mi instructor y posteriormente colega durante diez años, en mecánica. El me enseñó el valor de trabajar los problemas y de comprender los conceptos. Es también un experto en la explicación física. Algunos de los problemas utilizados en este libro tienen el mismo antecedente genérico, así como otros basados en su obra. Uno o dos de ellos son idénticos, y se usan con el debido permiso. Esto se reconoce totalmente. La cuarta persona con quien me encuentro en deuda, es A. L. Austin del Lawrence Radiation Laboratory. El Dr. Austin fue uno de mis alumnos hace años. Es actualmente un amigo personal, y ha revisado gran parte del manuscrito. La quinta persona es mi esposa, Jean, que ha soportado y compartido pacientemente conmigo esos años de preparación. Sin su presencia reconfortante, este libro aún sería sólo una buena intención.

También me encuentro en deuda con los cientos de estudiantes de ingeniería mecánica que, sin saberlo, han servido como sujetos de experimentación, al tratar yo un problema tras otro. Desearía dar las gracias a la Sra. Margaret French que mecanografió gran parte del manuscrito original, y a las Sras. Margaret Hansen, Barbara von der Meden y Mary Jane Alpaugh, quienes mecanografiaron la parte restante.

*Berkeley, California*
*Agosto 1971*

ROBERT F. STEIDEL, JR.

# INDICE DE MATERIAS

# UNO

# DINAMICA

## 1.1 INTRODUCCION

La vibración se define en la forma más simple, como un movimiento oscilatorio. Ha quedado implícito en el pasado e incluido en la mayor parte de las definiciones, que este movimiento oscilatorio es también periódico. Lo anterior no es tan cierto actualmente como lo fue una vez, puesto que ahora tenemos interés en el movimiento no periódico transitorio, y en los métodos analíticos utilizados para estudiar tal movimiento. Subsiste la implicación menor de que el movimiento es continuo y tiene un valor promedio. Esto tiene importancia en la ingeniería para la predicción del esfuerzo máximo, del desplazamiento promedio o de cierta medición de la fuerza reactiva.

Cualquier estudio sobre la vibración, debe volver primero a un repaso de la *dinámica,* ya que la vibración es movimiento primero que todo, y *dinámica* es el término usado para denominar la porción de la mecánica que trata del estudio de los cuerpos en movimiento y de las fuerzas que originan este movimiento. La *cinemática* es aquella parte de la dinámica que consiste en el estudio de la geometría del movimiento, sin hacer referencia a la fuerza o a la masa. La *cinética* es el estudio de la relación entre el movimiento de los cuerpos, y las fuerzas que actúan sobre ellos.

Se encuentra un comienzo lógico para el estudio de la dinámica y de la vibración en la obra de Galileo (1564-1642). A la edad de veinte años, en 1584, Galileo concibió correctamente el principio del péndulo isócrono. En 1657, el matemático holandés Huygens (1629-1695), aplicó ese principio a un reloj. En 1590, Galileo coronó sus realizaciones en la física experimental con el descubrimiento y la prueba de la ley de los cuerpos descendentes. Su trabajo sobre el movimiento y la aceleración fue la base para las leyes del movimiento formuladas por Sir Isaac Newton (1642-1727).

Durante doscientos años todo interés en la vibración quedó confinado al del periodo del péndulo, de los cuerpos astronómicos y mareas y a las perturbaciones observadas en los mismos. Pero a fines del siglo diecinueve, la maquinaria de alta velocidad introdujo muchos nuevos problemas, que incluían los fenómenos actualmente asociados con vibración mecánica. El Barón John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), organizó y desarrolló la teoría de la vibración mecánica, y en ésta su contribución se funda el campo moderno. En tiempos recientes han existido muchos investigadores que han contribuido también al desarrollo del mismo, y este tema se ha expandido en forma enorme. Se hará referencia especial a los trabajos de S. Timoshenko y J. P. Den Hartog, que fueron precursores en la solución de problemas industriales en vibración mecánica, así como grandes maestros en la ingeniería.

## 1.2 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION

La Cinemática es el estudio del movimiento, sin hacer referencia a la fuerza o a la masa. Concierne principalmente a la interrelación entre desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo.

Desplazamiento lineal, es la distancia dirigida que un punto ha recorrido sobre una trayectoria, a partir de un origen conveniente. Ya que éste es una cantidad dirigida, es un vector, y queda sometido a todas las características y leyes de los vectores. Si el origen se encuentra fijo, el desplazamiento es absoluto. Si el origen mismo se encuentra en movimiento, el desplazamiento es relativo. En cinética es esencial saber si el movimiento es absoluto o relativo. Las leyes del movimiento, de Newton, establecen la relación entre fuerza, masa y aceleración absoluta.

En la Fig. 1.1, el vector **s** es el desplazamiento del punto $P$, a partir del origen O Se puede seleccionar cualquier sistema conveniente de coordenadas, con las cuales se describa al vector **s**.

$$\mathbf{s}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z} \tag{1.1}$$

La selección de coordenadas debe ser de conveniencia matemática. El análisis físico de un problema es independiente de las coordenadas que se seleccionan.

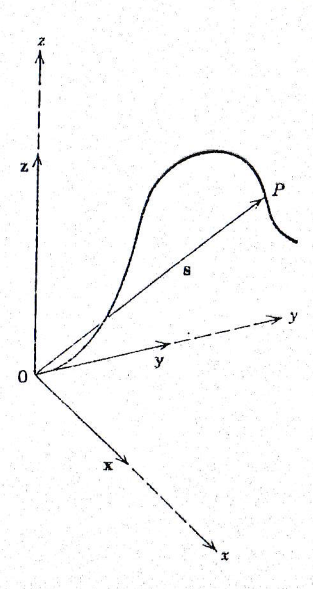
La velocidad instantánea del punto $P$, es el régimen de cambio en el tiempo, del desplazamiento **s**.

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\dot{\mathbf{s}} \tag{1.2}$$

El punto sobre la variable es una convención aceptada para indicar la primera derivada con respecto al tiempo. Dos puntos sobre la variable, indican la segunda derivada con respecto al tiempo. Se utilizará aquí la convención intercambiablemente con la forma escrita de la derivada, cuando su uso sea simple



Fig. 1.1

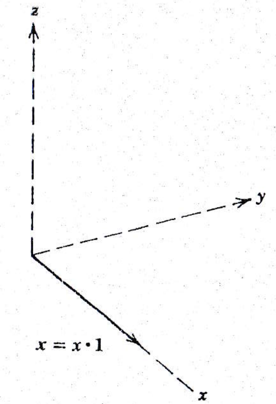



y claro. El uso indiscriminado de esta convención tiende a confundir, en lugar de aclarar, cuando el movimiento es también función de otras variables además del tiempo.

Si el punto $P$ se mueve en línea recta, por ejemplo a lo largo del eje $x$, como lo hace en la Fig. 1.2, el desplazamiento y la velocidad son funciones sólo de la coordenada $x$, y se puede usar la notación escalar para describir el movimiento

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x} \tag{1.3}$$

Fig. 1.2



.3

En este caso, el punto $P$ tiene un grado de libertad, ya que basta una sola coordenada para determinar la posición de $P$.

Lo anterior se aplica también al movimiento curvilíneo tal como el del péndulo simple de la Fig. 1.3, que se mueve en el plano $z$-$y$. La dirección del vector $\mathbf{v}_\theta$ es tangente a la trayectoria del péndulo, y es función de la manera en la cual se restringe el sistema. La magnitud del vector es proporcional al régimen de cambio en el tiempo del desplazamiento angular

$$\mathbf{v}_\theta = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{l} \tag{1.4}$$

El vector $\mathbf{l}$ es el vector dirigido desde $A$ hacia $P$, la longitud del péndulo. Por separado, se puede describir la velocidad en términos de $\dot{z}$ y $\dot{y}$

$$\mathbf{v}_\theta = \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{y}} \tag{1.5}$$

en la que $\dot{z}$ y $\dot{y}$ son vectores componentes de $\mathbf{v}_\theta$. Esta ecuación requiere dos coordenadas, $z$ y $y$, y una ecuación adicional de restricción geométrica, que es

$$l^2 = (l - z)^2 + y^2$$

La aceleración instantánea es el régimen de cambio en el tiempo de la velocidad.

Esta se puede expresar en términos de la aceleración componente en términos de cualesquiera coordenadas convenientes,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{s}} \tag{1.6}$$



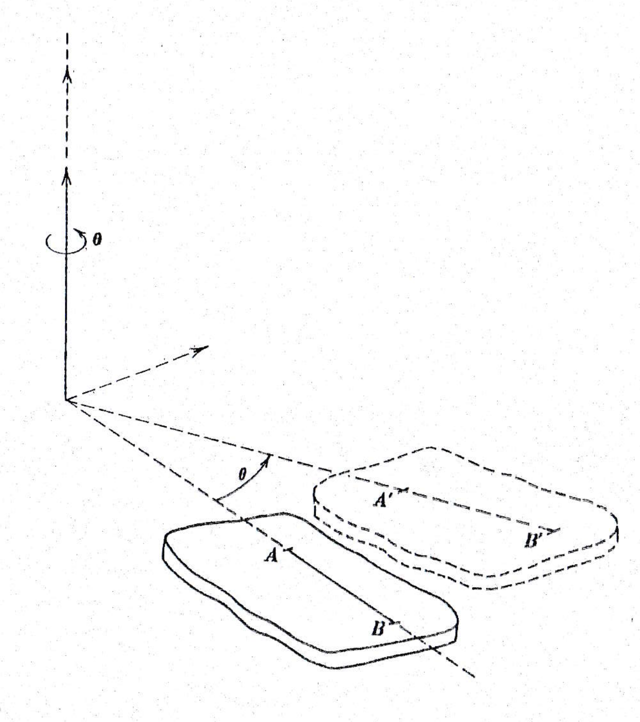
Se puede usar la aceleración escalar si la aceleración es función de una sola coordenada.

El movimiento que se ha estudiado, es el de una partícula o punto. Si se trata del movimiento de un cuerpo rígido, debemos también ocuparnos del desplazamiento angular.

Desplazamiento angular es el cambio de posición angular de una línea dada, medido a partir de una línea de referencia conveniente. En la Fig. 1.4, consideremos el movimiento de la línea $AB$, al moverse ésta desde su posición original hasta la posición $A'B'$. El ángulo entre las líneas $AB$ y $A'B'$ es el desplazamiento angular de la línea $AB$, $\theta_{AB}$. Esta también es una cantidad dirigida. La notación convencional usada para designar el desplazamiento angular es la de un vector normal al plano en el cual ocurre el desplazamiento angular. La longitud del vector es proporcional a la magnitud del desplazamiento angular. Si el desplazamiento lineal del punto $A$, es idéntico al desplazamiento lineal del punto $B$, la línea $AB$ no tendrá desplazamiento angular. Combinando el desplazamiento lineal con el desplazamiento angular, se puede describir por completo el movimiento tridimensional de cualquier cuerpo rígido.

La velocidad angular se define como el régimen de cambio en el tiempo del desplazamiento angular de manera similar a la de la definición de la velocidad lineal.

Fig. 1.4



$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{1.7}$$

La aceleración angular es el régimen de cambio en el tiempo, de la velocidad angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \tag{1.8}$$

Cada una de estas definiciones puede tener forma escalar si se puede expresar el movimiento angular en términos de una sola coordenada.

## 1.3 COORDENADAS

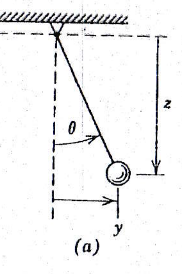
La aceleración de las coordenadas constituye un aspecto muy importante del estudio y resolución de los problemas en dinámica. Hasta en el más sencillo de los problemas, las matemáticas pueden volverse difíciles, si se usan coordenadas impropias o no acertadamente seleccionadas. Esto es cierto en particular en el estudio de la vibración mecánica.

Se pueden seleccionar las coordenadas convencionales tales como las coordeneadas cartesianas y las coordenadas polares, pero también se puede usar como *coordenada* cualquier medida conveniente del desplazamiento. Se está usando aquí el término *coordenada* en su forma más general, como la de una cantidad independiente que especifica una posición.

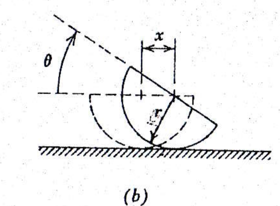
En la Fig. 1.5, se puede establecer el movimiento del péndulo simple, descrito también en la Fig. 1.3, en términos de ya sea las coordenadas cartesianas $z$ y $y$, o en términos del ángulo ^. La selección de $\theta$ como coordenada, es más conveniente que la selección de $z$ y $y$. El péndulo sólo tiene un grado de libertad, siempre que el movimiento se restrinja a un plano único. Al seleccionar a $\theta$ como coordenada, se hace uso del hecho adicional de que la longitud del péndulo es constante. Esta es una *restricción* del sistema. Las coordenadas $z$ y $y$ están restringidas por la ecuación de constancia $z^2 + y^2 = l^2$. La restricción juega un papel muy importante en la solución de problemas. El reconocer las restricciones es tan importante o más aún, que el seleccionar las coordenadas. Si reconocemos la restricción como una limitación al movimiento, por lo general podemos describir por completo el movimiento con un número menor de coordenadas. El número mínimo de coordenadas que se requiere para describir por completo el movimiento, corresponde al número de grados de libertad del sistema. Esto implica que si tenemos un gran número de coordenadas mayor que el de grados de libertad, deben existir suficientes ecuaciones de restricción para subsanar la diferencia.



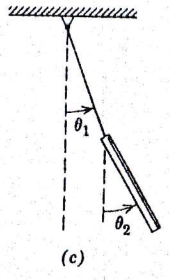
**Fig. 1.5**



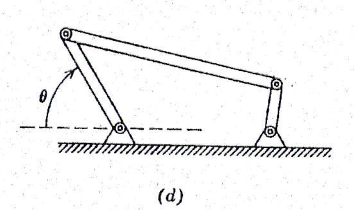
(a)



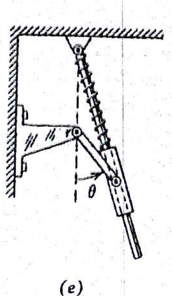
(b)



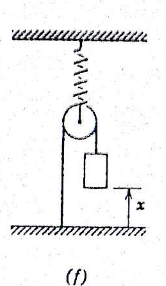
(c)



(d)



(e)



(f)

Un sistema de coordenadas que describe el movimiento general y reconoce las restricciones, se denomina de *coordenadas generalizadas*. En la Fig. 1.5a, la coordenada angular $\theta$ es la coordenada generalizada que reconoce la longitud fija del péndulo como una restricción del sistema. Las coordenadas lineales $z$ y $y$ no lo hacen así. En el semicilindro de la Fig. 1.5b, se pueden usar ya sea la coordenada $\theta$ o la coordenada lineal $x$, para describir el movimiento. Estas se encuentran linealmente relacionadas, ya que $r\,d\theta = dx$, y una coordenada es tan conveniente como la otra.

En la Fig. 1.5c, el movimiento de la barra que oscila como péndulo, se puede describir en términos de las coordenadas generales $\theta_1$ y $\theta_2$. Considerando que las longitudes de los péndulos $l_1$ y $l_2$ son constantes, no es necesario nada más para describir el movimiento.

En la Fig. 1.5d, el eslabonamiento de 4 barras tiene un solo grado de libertad. El movimiento de cualquier eslabón o de cualquier punto sobre los eslabones, se puede describir por completo en términos de la coordenada angular $\theta$ y de sus derivadas con respecto al tiempo. Lo mismo puede decirse para el mecanismo deslizante de la Fig. 1.5e.

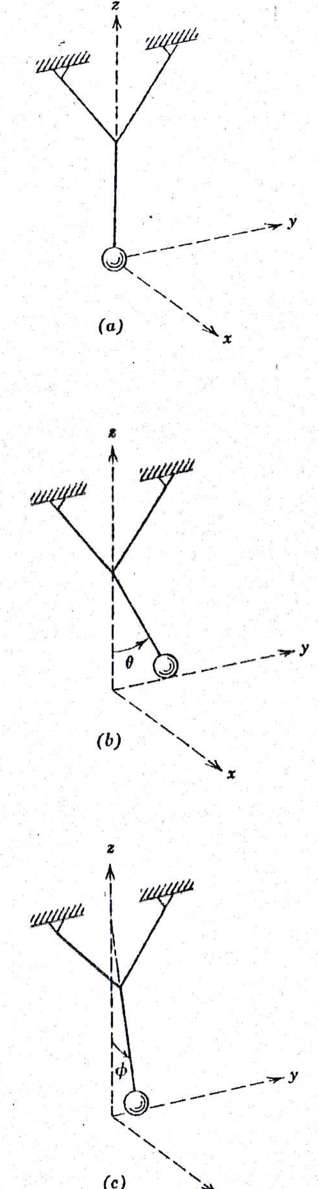
El movimiento de la masa suspendida y la polea de la Fig. 1.5f, se puede describir en términos de la coordenada única $x$. El desplazamiento lineal de la polea deberá determinarse con relación al desplazamiento lineal de la masa, con objeto de definir la fuerza del resorte, pero éste es un ejercicio cinemático.

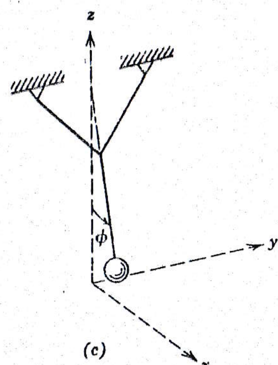
Sólo se necesita una afirmación adicional sobre coordenadas. Para esto, se puede hacer referencia al péndulo de la Fig. 1.6, que es un ejemplo simple, fácil de visualizar y más fácil de verificar por experimentación. El péndulo tiene dos grados de libertad. Si se le desplaza, oscilará hacia atrás y hacia adelante según un patrón generalmente circular. Existen dos excepciones. Si el péndulo se desplaza un ángulo $\theta$ en el plano $z$-$y$, el movimiento permanecerá en el plano $z$-$y$. Si se desplaza un ángulo $\phi$ en el plano $z$-$x$, el movimiento permanecerá en el plano $z$-$x$. Es evidente que el movimiento en la dirección de una coordenada, será independiente del otro. El movimiento en el cual sólo varía una coordenada, se denomina un *modo principal de movimiento*. Una característica de un modo principal, es el patrón común de todo movimiento. Todas las partículas pasan a través de las velocidades máximas y mínimas al mismo tiempo. Al definir el movimiento de una partícula, se define el movimiento de todas las partículas. Sólo se necesita una coordenada para definir el movimiento, y esta coordenada se denomina la *coordenada principal*. Analíticamente, la mayor parte de los problemas no requieren el uso de coordenadas principales, pero el concepto de coordenadas principales es en extremo importante. En sistemas lineales, se puede describir todo el movimiento mediante la superposición de modos principales.

Es interesante notar que las coordenadas principales, no son necesariamente coordenadas principales. En la Fig. 1.6, los ángulos $\theta$ y $\phi$ son ambos coordenadas generalizadas, así como coordenadas principales. En la Fig. 1.5c, los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$, son coordenadas generalizadas, pero no son coordenadas principales. No hay modo de movimiento que se pueda describir por completo en términos de $\theta_1$ o $\theta_2$ sin implicar la otra coordenada. No obstante, se pueden definir las coordenadas principales, y las definiciones involucrarán a $\theta_1$ y a $\theta_2$. No es importante en este momento hacer la definición, pero es importante reconocer que existen las coordenadas principales y los modos principales.



**Fig. 1.6**



## 1.4 ECUACIONES CINEMATICAS

Las definiciones de velocidad y aceleración implican las cuatro variables de desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo. Si eliminamos la variable tiempo de cada definición, tendremos una tercera ecuación de movimiento.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{1.8a}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{1.8b}$$

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \tag{1.8c}$$

Estas tres ecuaciones son las ecuaciones diferenciales del movimiento para la cinemática de una partícula. Hay tres ecuaciones diferenciales para la cinemática de una línea.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \tag{1.9a}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{1.9b}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega} \tag{1.9c}$$

Las primeras dos ecuaciones cinemáticas, son ecuaciones vectoriales, pero ya se refieren a una coordenada única, también se pueden usar ecuaciones escalares. La tercera ecuación implica el producto puntual de dos vectores, lo que la convierte en una ecuación escalar.

Con mucha frecuencia se obtienen datos en términos de la aceleración como función del tiempo. Mediante la integración de estos datos se obtienen la velocidad y el desplazamiento. Es suficiente el conocimiento de la relación física entre cualquier cantidad cinemática y el tiempo, o de dos ecuaciones cinemáticas, para obtener una completa comprensión cinemática del movimiento. La Tabla I es un breve resumen de las ecuaciones cinemáticas escalares para el movimiento de una partícula a lo largo de una coordenada. Podría proporcionarse un sistema de ecuaciones análogo para el movimiento de una línea, pero éstas se usan con menor frecuencia en la vibración mecánica, con la posible excepción de la vibración torsional.

*Tabla I*

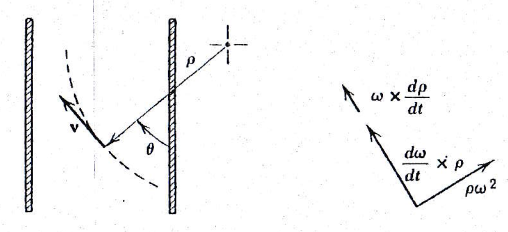
| *Variables* | *Desplazamiento Tiempo* | *Velocidad Tiempo* | *Aceleración Tiempo* | *Desplazamiento Velocidad Aceleración* |
|---|---|---|---|---|
| Desplazamiento | — | $\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ | $\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} a\,dt\,dt$ | $\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{a}\,dv$ |
| Velocidad | $v = \frac{ds}{dt}$ | — | $\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$ | $\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds$ |
| Aceleración | $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ | $a = \frac{dv}{dt}$ | — | $a = v\frac{dv}{ds}$ |



Es útil y conveniente la comprensión de la expresión gráfica de la cinemática. Si se expresa el desplazamiento como una función del tiempo, la pendiente de la curva resultante es la velocidad instantánea. Si se expresa la velocidad como función del tiempo, la pendiente de la curva es la aceleración instantánea, y el área bajo la curva velocidad-tiempo durante un intervalo de $t_1$ a $t_2$, es el cambio en desplazamiento. Estas son relaciones sencillas que se comprenden universalmente. Las expresiones de la aceleración son menos familiares. El área bajo la curva aceleración-tiempo, durante el intervalo de $t_1$ a $t_2$, es el cambio de velocidad entre estos límites, en tanto que el área bajo la curva aceleración-desplazamiento, ocurrente un desplazamiento de $s_1$ a $s_2$, representa la mitad de la diferencia de cuadrado de la velocidad entre $t_1$ y $t_2$.

### *PROBLEMA EJEMPLO 1.1*

Una partícula se mueve entre dos placas cargadas paralelas, según una trayectoria curva que se encuentra en el plano del diagrama. En la posición $P$, el radio de curvatura de la trayectoria es $\varrho$, y el vector $\varrho$ forma un ángulo $\theta$ con las placas. La velocidad de la partícula es de 240 mm/s, $\varrho$ vale 80 mm y está aumentando a un régimen de 40 mm/s. El ángulo $\theta$ está creciendo a un régimen de 10 rad/s en cada segundo. ¿Cuál es la aceleración total de la partícula?




***Solución:***

Por definición cinemática

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

y

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$$

Algunos de estos términos han sido dados y otros se pueden encontrar a partir de la cinemática básica. La velocidad angular $\omega$ está determinada, ya que sabemos la velocidad lineal y el radio de curvatura.

$$v=240\ \text{mm/s}$$

$$\rho=80\ \text{mm}$$

$$\omega=\frac{v}{\rho}=\frac{240}{80}=3\ \text{rad/s}$$

También se nos ha dado el régimen de cambio de $\omega$ y de $\rho$ con respecto al tiempo,

$$\frac{d\omega}{dt}=10\ \text{rad/s}^2 \qquad \text{y,} \qquad \frac{d\rho}{dt}=40\ \text{mm/s}$$

Sustituyendo cada uno de los términos apropiados en la ecuación vectorial

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\rho}=800\ \text{mm/s}^2$$

El vector $\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ tiene dos componentes, una normal y una tangencial

$$\rho\omega^2=720\ \text{mm/s}^2$$

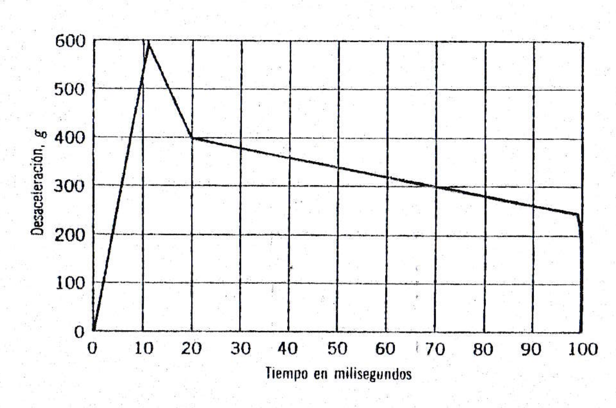
$$\omega\frac{d\rho}{dt}=120\ \text{mm/s}^2$$

La aceleración total es la suma vectorial de una aceleración normal de 720 mm/s² y una aceleración tangencial de 920 mm/s².

### PROBLEMA EJEMPLO 1.2

La observación experimental de un proyectil que ha penetrado en la Tierra, proporciona la información que se da. Determínese la curva velocidad-tiempo, aproxim do la curva de celeración-tiempo. Calcúlese la velocidad de penetración. El proyectil entró a la superficie de la Tierra con una velocidad de Mach 1, y fue recuperado a una profundidad de 15.5 m. ¿Es válida la información?






***Solución:***
Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento

$$v-v_0=\int_0^t a\,dt$$

y

$$s-s_0=\int_0^t v\,dt$$

Integrando numéricamente, con intervalos de 10 ms, se puede determinar la curva velocidad-tiempo. El área bajo la curva aceleración-tiempo, representa el cambio de velocidad del proyectil

$$0-v_0=-\sum_{0}^{100} a\,\Delta t=329.9\ \text{m/s}$$

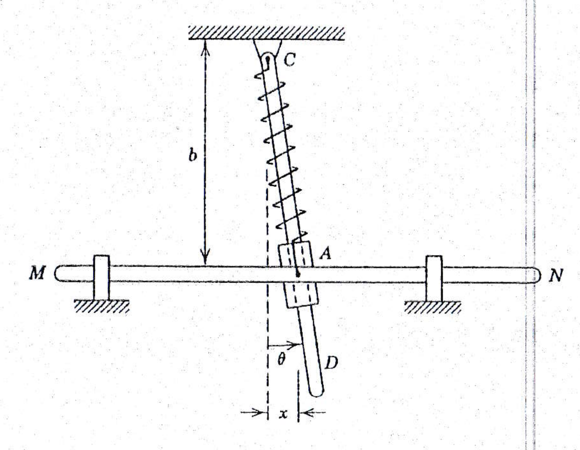
Integrando otra vez, se puede determinar la curva desplazamiento-tiempo. El área bajo la curva velocidad-tiempo, es el cambio en desplazamiento del proyectil en el intervalo de 100 ms

$$s-0=\sum_{0}^{100} v\,\Delta t=15.26\ \text{m}$$

Si se recuperó el proyectil a una profundidad de 15.5 m, ello concuerda bastante bien con la información obtenida, y es razonable creer que dicha información es válida.

### PROBLEMA EJEMPLO 1.3

Un mecanismo consiste del eslabón *MN,* que se mueve horizontalmente sobre guías sin fricción. Este lleva un collarín *A,* en el cual es libre de moverse el eslabón *CD.* Determínese la velocidad y la aceleración de los eslabones *MN* y *CD,* en términos de coordenadas generalizadas. El resorte helicoidal no se halla deformado cuando $\theta = 0$.




*Solución:*

Este sistema tiene un solo grado de libertad. Esto es, sólo se necesita una coordenada para describir por completo el movimiento de los eslabones *MN* y *CD*. Esta coordenada puede ser, o el desplazamiento horizontal del eslabón *MN*, que es *x*, o el desplazamiento angular del eslabón *CD*. Estas se encuentran relacionadas cinemáticamente. Por trigonometría,

$$x = b \tan \theta$$

Diferenciando con respecto al tiempo, la velocidad es

$$\dot{x} = b\dot{\theta}\, s^2\, \theta$$

y la aceleración es

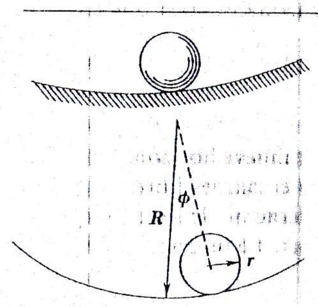
$$\ddot{x} = 2b\dot{\theta}^2 \quad s^2\, \theta \tan \theta + b\ddot{\theta}\, s^2\, \theta$$

En términos de la coordenada generalizada $\theta$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{b} \cos^2 \theta$$

y

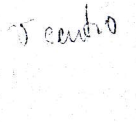
$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{b} \cos^2 \theta - \frac{2\dot{x}^2}{b^2} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta$$



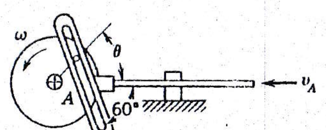

**PROBLEMA 1.4**

Determinar la velocidad angular $\omega$ de la esfera de radio *r*, que rueda en un casquete esférico poco profundo de radio *R*, en términos de la coordenada única $\phi$.

Respuesta: $\omega = \frac{(R-r)}{r} \cdot \frac{d\phi}{dt}$







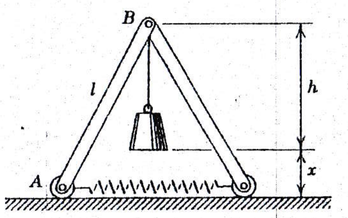

**PROBLEMA 1.5**

El yugo *A* articula con el perno dispuesto en la rueda la cual tiene una velocidad angular constante $\omega$. Determínese la velocidad del yugo como función del tiempo.

**PROBLEMA 1.6**

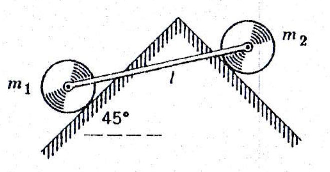
La amplitud de una oscilación se puede describir mediante la relación $s = A$ sen $(\omega t + \phi)$. En $t = 0$, la velocidad es $v_0$ y el desplazamiento es $s_0$. Determínense expresiones para el ángulo de fase $\phi$ y la amplitud máxima *A*, en términos de $s_0$ $v_0$ y $\omega$.

Respuesta: $A = \sqrt{s_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\omega^2}}$; $\tan \phi = \frac{s_0 \omega}{v_0}$




**PROBLEMA 1.7**

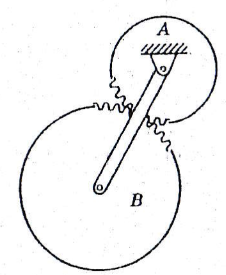
Determínense la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón *AB*, en términos de la coordenada única *x*.




**PROBLEMA 1.8**

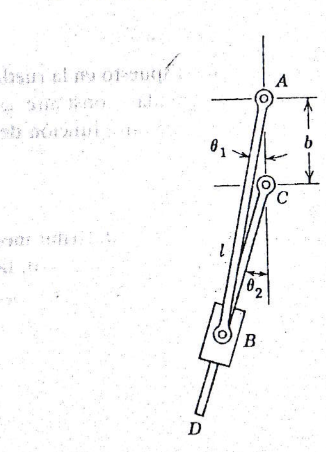
Cada uno de los dos cilindros sólidos idénticos rueda sin deslizamiento sobre uno de los planos inclinados. Estos cilindros se encuentran conectados entre sí mediante una barra sin peso, de longitud *l*, y ambos tiene un radio *r*. Determínense las velocidades de $m_1$ y de $m_2$ en términos de una coordenada generalizada única.

Respuesta: $\omega_1 = \frac{\dot{x}_1}{r}$; $\omega_2 = -\frac{x_1}{r\sqrt{l^2 - x_1^2}}\, \dot{x}_1$




**PROBLEMA 1.9**

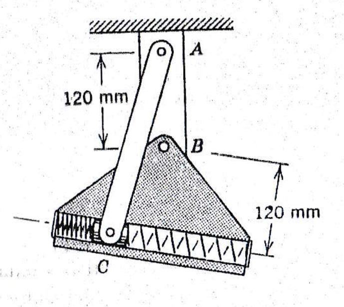
En engrane *A* está fijo y no puede moverse. El engrane *B* engrana con aquél y gira alrededor del mismo, con la palanca *AB* como radio. Determínese la velocidad angular del engrane *B* en términos de velocidad angular de la palanca *AB*, $r_B = 2r_A$.




**PROBLEMA 1.10**

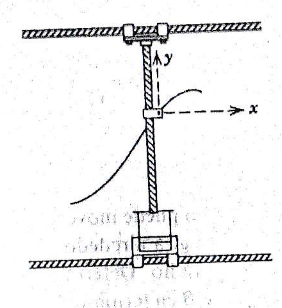
El collarín deslizante $B$, se mueve sin fricción sobre el eslabón $CD$. Los eslabones $AD$ y $CD$ son barras lisas uniformes, de las mismas longitud y masa. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Defínase la velocidad de cada eslabón en términos de coordenadas generalizadas. Limítese el desplazamiento a oscilaciones pequeñas.

Respuesta: $\dot{\theta}_2 = \dfrac{l}{l-b}\,\dot{\theta}_1$




**PROBLEMA 1.11**

El eslabón $AC$ tiene 240 mm de longitud y es libre de girar alrededor de $A$. La deslizadora $C$ se mueve en un eslabón ranurado que gira alrededor de $B$. ¿Cuántos grados de libertad existen? Exprésese la velocidad de cada eslabón en términos de la(s) coordenada(s) generalizada(s). Supónganse ángulos de movimiento muy pequeños.

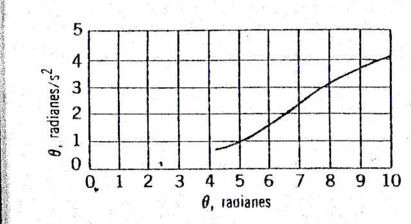



**PROBLEMA 1.12**

Un graficador $x$-$y$, consiste de una plumilla registradora, que escribe sobre papel coordenado rectangular. La plumilla tiene una velocidad límite de 52 mm/s en la dirección $x$ y de 30 mm/s en la dirección $y$. Las aceleraciones limitantes son de 260 mm/s² en la dirección $x$ y de 150 mm/s² en la dirección $y$. Para las condiciones limitantes, ¿cuál es el radio de curvatura máximo que puede seguir la plumilla si la aceleración-$x$ es positiva y la aceleración-$y$ es negativa? ¿Es igual la respuesta para una aceleración-$y$ positiva?

Respuesta: $\varrho$ = 13.87 mm; no.






**PROBLEMA 1.13**

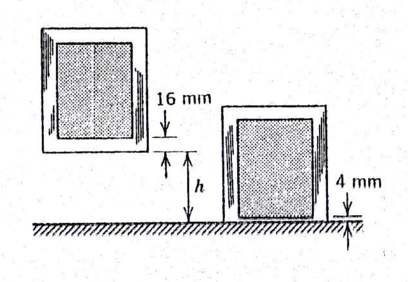
Se registran las mediciones de la aceleración angular $\alpha$ de un volante, para varios desplazamientos angulares $\theta$ del mismo, y se grafican como se muestra. Si la velocidad angular era de 6 rad/s en sentido dextrógiro y $\theta$ = 5 rad, calcúlese, con ayuda de la gráfica, la velocidad angular cuando $\theta$ = 10 rad. La gráfica se refiere a un movimiento dextrógiro.

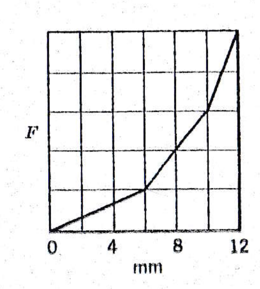
Respuesta: $\dot{\omega}$ = 7.9 s⁻¹

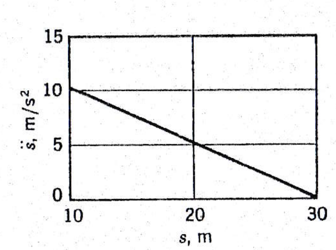
**PROBLEMA 1.14**

La fuerza necesaria para compactar empaques de cartón corrugado, aumenta con la deformación del cartón. Los vacíos dentro del empaque desaparecen cuando la deformación alcanza el 75%. Calcúlese la aceleración máxima para un paquete que cae desde una altura de 1 m, si se usan 16 mm de empaque de cartón corrugado y el empaque se comprime por completo durante el impacto. Supóngase que la fuerza de deformación es directamente proporcional a la aceleración durante la deformación.

Respuesta: $a$ = —236 g



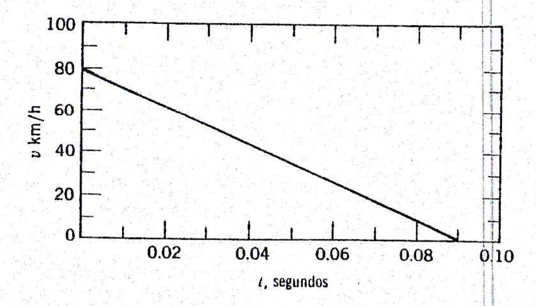




**PROBLEMA 1.15**

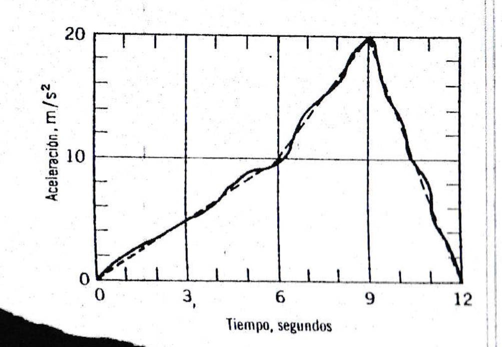
Una partícula se mueve en línea recta, con una aceleración como se muestra. Determínese la velocidad final de la partícula, si ésta parte del reposo.

Respuesta: $v$ = 14.14 m/s

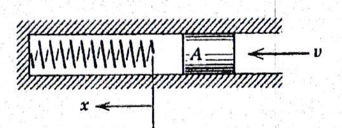
**PROBLEMA 1.16**
El estudio sobre los choques de automóviles o de aeronaves, ha demostrado que el soporte completo de cuerpo (cinturones de seguridad en el asiento), provee máxima protección contra las fuerzas de aceleración y dan la mejor oportunidad de supervivencia. En un choque en el que se detiene a un automóvil a una velocidad de 80 km/h en 0.09 s con una disminución linealmente decreciente, determínese la desaceleración y determínese la distancia de detención que deben interconstruirse en el automóvil como un aplastamiento del cuerpo de éste. Determínese la distancia de detención y la desaceleración para 80 km/h.




**PROBLEMA 1.17**
La gráfica muestra el registro aceleración-tiempo de un trineo cohete experimental de propelente sólido. El trineo parte del reposo en el tiempo $t = 0$. Usando las líneas interrumpidas para simplificar el registro aceleración-tiempo, constrúyase el registro velocidad-tiempo, determínese la velocidad final en $t = 12$ s, y determínese la distancia total recorrida hasta ese instante.






**PROBLEMA 1.18**
La deslizadera $A$ golpea en el resorte con una velocidad inicial de 40 m/s. La velocidad se reduce a 20 m/s cuando la compresión del resorte es de 0.5 m. La desaceleración es proporcional a $x$. Determínese la desaceleración cuando $x = 0.25$ m.

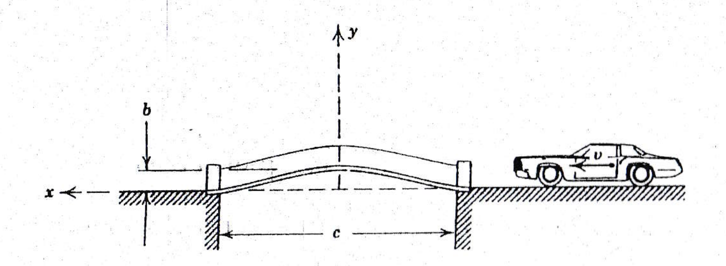
Respuesta: $a = -1\,200$ m/s²

**PROBLEMA 1.19**
Un cohete se eleva verticalmente con una aceleración constante de 20 m/s² durante 20 s. A los 20 s, se detiene el motor y el cohete continúa ascendiendo durante otros 20 s. Las aletas de cola están ajustadas para hacer girar la cohete alrededor de su propio eje. Si la aceleración angular de rotación es proporcional a la velocidad de ascenso del cohete, de manera que $\ddot{\theta} = V/200$, en la que $\ddot{\theta}$ está en radianes/segundo², cuando $V$ está en metros/segundo, ¿cuál es la velocidad angular de rotación cuando $t = 40$ s?

Respuesta: $\omega = 50.2\ s^{-1}$

**PROBLEMA 1.20**
La segunda etapa de un cohete de dos estapas, se eleva verticalmente, acelerando en forma lineal desde 1 g hasta 4 g en 60 s. Si la separación de la segunda etapa tiene lugar a una altura de 15 km y a una velocidad de 1 000 m/s, determínese la velocidad y altura a las cuales se quema la segunda etapa.

**PROBLEMA 1.21**
Un puente sobre un arroyo en un camino campestre, tiene forma aproximadamente senoidal. Determínese para un automóvil que cruza el puente, la magnitud y localización a las que el mismo experimentará (a) la



velocidad vertical máxima y (b) la aceleración vertical máxima. El automóvil tiene desplazamiento vertical cero y velocidad vertical cero al entrar al puente.

Respuesta: $\dot{y}=\frac{vb\pi}{c}$; $\ddot{y}=2b\left(\frac{v\pi}{c}\right)^2$

**PROBLEMA 1.22**

El movimiento de un cuerpo se puede definir en términos de una sola coordenada $x$, y éste se mueve con una aceleración constante en la dirección de la coordenada. Cuando $t = 0$, el desplazamiento es —6 m a partir de un origen conveniente. Cuando $t = 2$ s, el desplazamiento es cero. Cuando $t = 4$ s, la velocidad es cero. ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 6$ s?

Respuesta: $v = -2$ m/s

## 1.5 CINETICA DE UNA PARTICULA

La cinética es el estudio de la relación entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que causan el movimiento. Este fue un tema que se consideró mitad filosofía y mitad ciencia y alcanzó a ser dogma, hasta muy dentro del siglo dieciocho. El trabajo experimental de Galileo abrió el camino para el análisis y reafirmación de la mecánica. No obstante, pasaron cien años antes de que Sir Isaac Newton (1642-1727) formulara las leyes básicas de la cinética. Esto lo hizo en su monumental obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematics,* publicada en 1687, que estableció las leyes fundamentales de la física moderna por vez primera.

En esencia, las tres leyes que gobiernan la cinética de una partícula, son:

1. Si un sistema equilibrado de fuerzas actúa sobre una partícula en reposo, ésta permanecerá en reposo. Si un sistema equilibrado de fuerzas actúa sobre una partícula en movimiento, ésta permanecerá en movimiento en línea recta, sin aceleración.
2. Si un sistema de fuerzas no equilibrado actúa sobre una partícula, ésta se acelerará en proporción a la magnitud y en la dirección de la fuerza resultante.
3. Cuando dos partículas ejercen fuerzas una sobre la otra, estas fuerzas son iguales en magnitud, opuestas en dirección y colineales.



La segunda ley de Newton se acepta universalmente como el principio fundamental de la dinámica clásica. Si $\mathbf{R}_1$ es la resultante del sistema de fuerzas, la aceleración será $\mathbf{a}_1$. Si la resultante es $\mathbf{R}_2$, la aceleración será $\mathbf{a}_2$ y

$$\frac{\mathbf{R}_1}{\mathbf{a}_1}=\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{a}_2}=\frac{\mathbf{R}_n}{\mathbf{a}_n}=\text{constante}$$

esta constante de proporcionalidad se denomina masa. Constituye una medida cuantitativa de la inercia. Se puede establecer matemáticamente,

$$\sum \mathbf{F}=m\mathbf{a}_G \tag{1.10}$$

La resultante del sistema de fuerzas no equilibrado, es igual al producto de la masa y la aceleración del centro de masa $\mathbf{a}_G$.

En el sistema S.I., las unidades de fuerza son los newtons, derivados de la segunda ley de Newton, del producto de la masa (kilogramos, kg) y la aceleración (metros por segundo por segundo m/s²). Este se llama un sistema absoluto, ya que en él se deriva la fuerza, y la masa y la aceleración son absolutas.

En el sistema U.S.-Británico, las unidades de masa (slug, 32.174 lbm), se derivan de la relación entre la fuerza (libras, lbf) y la aceleración (pies por segundo por segundo, ft/s²). Un segundo sistema, aunque raramente usado, consiste en citar la fuerza en libras fuerza (lbf), la masa en libras masa (lbm), y la aceleración en pies por segundo por segundo (ft/s²). Sin embargo, en este caso la ecuación 1.10 deberá reemplazarse por

$$\sum \mathbf{F}=\left(\frac{1}{32.174}\right)m\mathbf{a}_G$$

La justificación para esta peculiar versión de la segunda ley de Newton, es la de quedar en capacidad de establecer que una libra fuerza (lbf), es la fuerza requerida para sostener en equilibrio una libra masa (lbm) al nivel del mar, en donde $g = 32.174$ ft/s². Ambos sistemas se conocen como sistemas gravitacionales, ya que el valor del slug o de la constante 1/32.174 dependen de la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra. Como nunca se ha usado por amplitud el slug, y es causa de confusión utilizar la libra tanto para masa como para fuerza, en dinámica se prefiere el sistema S.I. También, éste es un sistema internacional.

Aunque el sistema S.I. elimina cualquier duda acerca de las unidades, el ingeniero en vibración debe estar familiarizado con el citado sistema común gravitacional de ingeniería, debido a la valiosa cantidad de literatura científica y de ingeniería dedicada a la dinámica estructural, que se ha acumulado a través del tiempo. La solución de la mayor parte de los problemas de vibración, debe comenzar por un análisis del sistema de fuerzas que actúa sobre la partícula o cuerpo. Si el problema es estrictamente geométrico, la solución puede necesitar sólo cinemática, pero la mayor parte de los problemas no está así limitada. Un sistema de fuerzas no equilibrado que actúa sobre

una partícula o cuerpo, hará que esta partícula o cuerpo se acelere, y la vibración de la partícula o cuerpo, como respuesta, forma parte de un sistema que resiste a esta aceleración con una fuerza lineal o no linealmente proporcional a la magnitud del desplazamiento de esa partícula o cuerpo.

## 1.6 CINETICA DE UN CUERPO RIGIDO

Las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido, son

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m\dot{\mathbf{v}}_G \tag{1.11a}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \mathbf{H}_G \tag{1.11b}$$

El símbolo $\mathbf{H}_G$ representa el momentum angular del cuerpo rígido. La suma de momentos, $\Sigma \mathbf{M}_G$ es el momento resultante de todas las fuerzas y parejas externas alrededor del mismo eje a través del centro de masa.

Cada vector puede expresarse en tres coordenadas ortogonales. Tres grados de libertad y tres coordenadas generalizadas describen el movimiento de una partícula, y se necesitan seis grados de libertad y seis coordenadas generalizadas para describir por completo el movimiento de un cuerpo rígido. Para un cuerpo rígido, la primera ecuación describe la traslación, y es idéntica con la ecuación del movimiento para la traslación de una partícula (Ec. 1.10). La segunda ecuación reconoce un cuerpo rígido que se puede desplazar tanto en rotación como en traslación. La medición de la rotación es el desplazamiento de una línea a través de la coordenada angular $\boldsymbol{\theta}$.

Para un movimiento plano, que se define como un movimiento tal que todas las trayectorias de todos los puntos del cuerpo rígido se encuentran en planos paralelos, el cuerpo rígido tendrá tres grados de libertad. El movimiento plano comprende tanto traslación como rotación, e implicará las coordenadas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\boldsymbol{\theta}$. En el movimiento plano, todas las líneas sobre o dentro de un cuerpo rígido, tienen el mismos desplazamiento angular. Esta explicación se desprende de la definición de un cuerpo rígido. La segunda ecuación vectorial, no es necesaria para el movimiento de una partícula.

La ecuación del movimiento se reduce a

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m\dot{\mathbf{v}}_G \tag{1.12a}$$

$$\sum \mathbf{M}_0 = I_G\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}_G = I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}_0 \tag{1.12b}$$

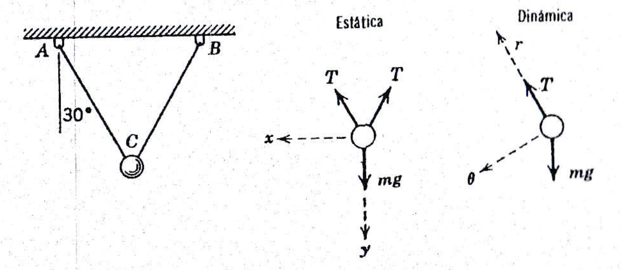
$\Sigma \mathbf{M}_0$ es el momento resultante alrededor de un eje arbitrario 0. Estas ecuaciones implican tanto la aceleración lineal, $\dot{\mathbf{v}}_G$ o $\dot{\mathbf{v}}_0$ como la aceleración angular $\boldsymbol{\theta}$. El término $\mathbf{r}$ es el vector desplazamiento del centro de masa, a partir del eje de referencia. Sólo se necesita la coordenada $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ para describir el movimiento plano, si el eje de referencia se encuentra fijo, o tiene una aceleración cero. En este caso, la ecuación de momento se reduce a la ecuación cinética del movimiento para rotación.



$$\sum \mathbf{M}_0 = I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.13}$$

### *PROBLEMA EJEMPLO 1.23*

Una masa $m$ se mantiene en sitio por medio de dos alambres de igual longitud. Determínese la tensión estática en cada alambre, y determínese la fuerza sobre el alambre que queda, si se corta uno de ellos.




***Solución:***
Este es un ejemplo excelente en mecánica para mostrar la diferencia entre una situación estática y una dinámica.
*Estática:* En el equilibrio estático, la resultante de la suma de fuerzas tiene valor cero. Son convenientes aquí las coordenadas cartesianas

$$\sum F_x = 0; \qquad \sum F_y = 0$$

$$2T\cos 30° = mg$$

$$T = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

*Dinámica:* Si se corta el alambre del lado derecho, $BC$, la masa $m$ oscila en un arco alrededor de $A$ como centro. Esto constituye una restricción sobre el movimiento. Las coordenadas que reconocen esta restricción son el desplazamiento normal y el tangencial a la trayectoria.

En la dirección-$r$

$$\sum \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r$$

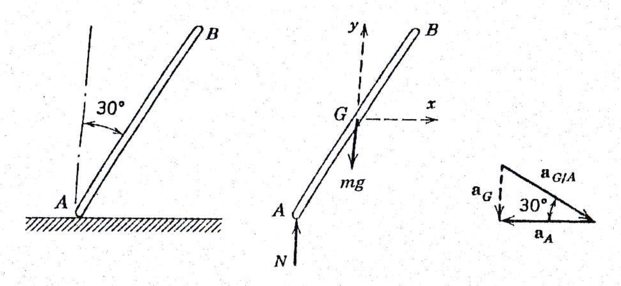
$$T - mg\cos 30° = ma_r$$

En el momento en el que se corta el alambre, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$, y

$$T = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

### PROBLEMA EJEMPLO 1.24

Una barra esbelta, $AB$, de longitud $l$ y con una masa $m$, decansa con el extremo $A$ sobre una superficie horizontal desprovista de fricción. *El extremo B está sostenido. Si se liberara súbitamente este extremo B, estando la barra en la posición inclinada mostrada, ¿cuál será la reacción inicial en el extremo A?*




***Solución:***

La clave para la resolución de la mayor parte de los problemas en cinética es el conocimiento de las fuerzas activas. El diagrama de cuerpo libre muestra que existen dos fuerzas activas, la fuerza normal entre la superficie horizontal y el extremo $A$ de la barra, y la fuerza del peso debida a la masa distribuida $m$, que actúa en el centro de gravedad $G$. Ya que ambas de estas fuerzas son verticales, no puede haber aceleración horizontal de la barra. Se toma el centro de gravedad como origen de nuestro sistema de coordenadas

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_g$$

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 = m\ddot{x} \qquad \text{y} \qquad \ddot{x} = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_y = N - mg = m\ddot{y} \qquad (1)$$

Esto proporciona nuestra primera ecuación de movimiento. Se puede formar una segunda ecuación tomando la suma de momentos

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_g$$

$$N\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} \qquad (2)$$

El desplazamiento angular de la barra $AB$ es positivo en dirección de la suma de momentos.

Estas dos ecuaciones contienen tres cantidades conocidas: $N$, $\theta$ y $\ddot{y}$. Cinemáticamente, $\ddot{y}$ y $\theta$ están relacionadas

$$\mathbf{a}_g = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A}$$



La aceleración del extremo $A$ debe ser horizontal, y la aceleración de $G$ con respecto a $A$, es

$$\mathbf{a}_{G/A} = \frac{l}{2}\alpha \qquad \overline{\measuredangle 30}$$

Un diagrama vectorial muestra que

$$\mathbf{a}_G = \frac{l}{4}\alpha = \ddot{y} \downarrow$$

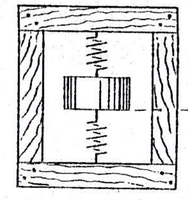
Sustituyendo, la fuerza normal debe ser

$$N = \tfrac{4}{7}mg$$

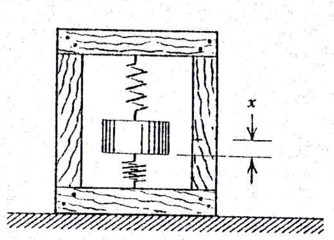
---

**PROBLEMA 1.25**

Con objeto de evitarle daño por una caída sobre una superficie rígida, se coloca un instrumento delicado dentro de un recipiente. El material del empaque se puede simbolizar como un resorte elástico capaz de absorber la tensión y la compresión. El instrumento tiene una masa de 5 kg, y cada resorte tiene una constante de 5 000 N/m. Si el desplazamiento máximo del instrumento es de 50 mm durante el impacto, ¿cuál será la máxima desaceleración que experimente el instrumento?



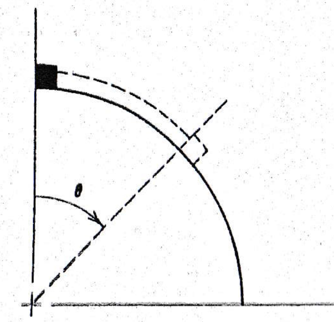





**PROBLEMA 1.26**

Se suspende una cadena de longitud $l$ y peso $\mu$ por unidad de longitud, de una cuerda elástica. Determínese la aceleración del centro de masa de la cadena restante, si se corta retirándola súbitamente, su cuarta parte inferior.

Respuesta: $a = \frac{1}{3}g$




**PROBLEMA 1.27**

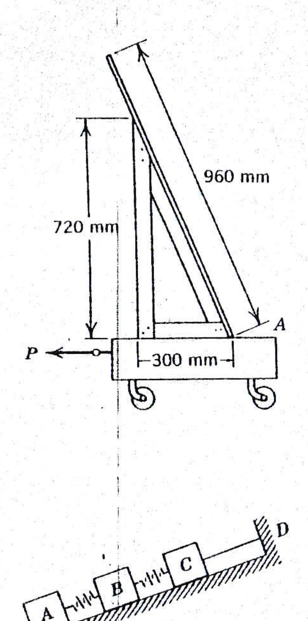
Un bloque pequeño se desliza sobre una pendiente circular perfectamente lisa. ¿Qué ángulo forma el bloque con el eje del círculo cuando pierde contacto con la pendiente?

Respuesta: $\theta = 48.1°$

**PROBLEMA 1.28**

Una cuerda de arnés de aparcamiento se forma de 100 filamentos de hule reunidos en un cable. Este cable soporta una masa que pesa 2 000 kg y se estira 0.4 m estáticamente. Determínese el estiramiento estático adicional y la aceleración máxima si se rompe un filamento del cable.

Respuesta: 4 mm; 0.098 m/s²




**PROBLEMA 1.29**

Se muestra esquemáticamente una carretilla de 45 kg utilizada para transportar vidrios gruesos. Determínese la tensión máxima que se puede aplicar al carro antes de que el vidrio se voltee alrededor del extremo $A$. El vidrio pesa 75 kg.

Respuesta: $P = 400$ N

**PROBLEMA 1.30**

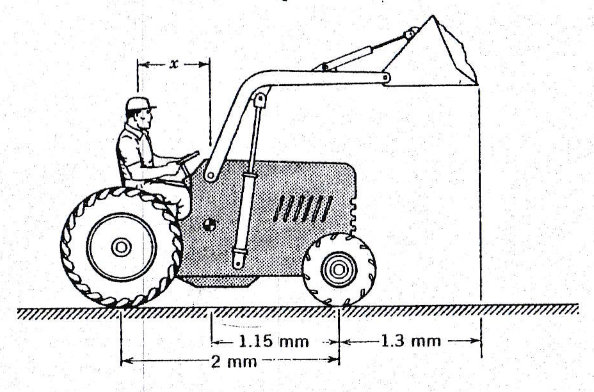
Los cuerpos $A$, $B$ y $C$, cada uno con una masa de 5 kg, se encuentran conectados por medio de un resorte con módulo de 75 N/m. Los cuerpos están en equilibrio estático sobre un plano liso. Determínese, si se corta súbitamente el cable, $CD$, la aceleración inicial de los cuerpos $A$, $B$, y $C$, y la aceleración inicial del centro de masa.

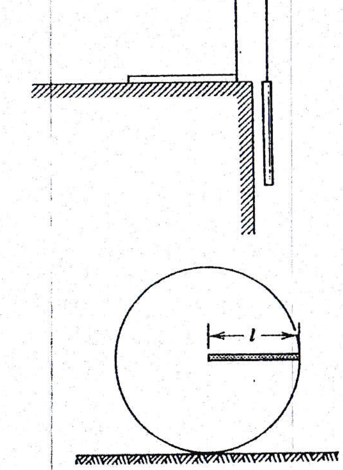


**PROBLEMA 1.31**

Un camión montacargas provisto de ruedas de hule, con una masa de 4 000 kg y un operador de 75 kg, tiene un radio centroidal de giro de 1.4 m, en la configuración mostrada. Determínese la localización horizontal del operador a partir del centro de masa, si éste no debe sentir una aceleración vertical cuando deja caer una carga de 500 kg. No hay fuerzas de tracción bajo las ruedas.

Respuesta: $x = 0.8$ m




**PROBLEMA 1.32**

Dos barras uniformes de longitud igual $l$, y de pesos iguales $W$, están sujetas a un cable que pasa sobre una polea. Una descansa sobre una superficie horizontal lisa, y la otra pende libremente. Determínese la aceleración de la barra libremente pendiente, si se libera al sistema desde el resposo, en la posición mostrada.

Respuesta: $a = \frac{3}{8}g$



**PROBLEMA 1.33**

Se asegura, como se muestra, una barra uniforme, de longitud $l$, y masa $m$, a un aro circular de radio $l$. El peso de aro es despreciable. Si se libera la barra y el aro desde el reposo en la posición ilustrada, determínense los valores iniciales de la fuerza de fricción $F$ y de la fuerza normal $N$, bajo el aro. La fricción es suficiente para evitar el deslizamiento.

Respuesta: $F = \frac{3}{8}$ mg; $N = \frac{13}{16}$ mg

## 1.7 TRABAJO Y ENERGIA

Los conceptos de trabajo y energía son fundamentales también para el estudio de la dinámica, y especialmente de la vibración mecánica. Se define un incremento de trabajo como el producto de un incremento de desplazamiento y la componente del vector fuerza, **F**, en la dirección del desplazamiento. Este es un producto vectorial puntual, y por tanto un escalar.

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Es evidente que se puede definir igualmente bien un incremento de trabajo como el producto de la fuerza y la componente del incremento del desplazamiento en la dirección de la fuerza. El incremento de trabajo realizado por una pareja **M** que actúa sobre un cuerpo durante un incremento de rotación angular $d\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ en el plano de la pareja, es $\mathbf{M} \cdot d\ddot{\boldsymbol{\theta}}$.

Se define la energía como la capacidad de un cuerpo para realizar trabajo por razón de su movimiento o configuración. La configuración de un cuerpo, dentro de un sistema, es un juego de posiciones para todas las partículas que forman ese cuerpo. La energía mecánica puede ser cinética o potencial. La energía cinética es la energía que es un resultado directo de la velocidad de movimiento. Por definición, la energía cinética de una partícula es

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \tag{1.16}$$

La expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido es más complicada

$$T = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_G \cdot m\mathbf{v}_G + \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{H}_G \tag{1.17}$$

En este caso, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ es la velocidad angular, y $\mathbf{H}_G$ es el momentum angular de la rigidez del cuerpo, referidos a un eje que pasa por el centro de masa. En el movimiento plano, tal como una vibración torsional, estos términos pueden simplificarse en forma considerable. Los vectores momentum angular y velocidad angular son colineales, lo que reduce la Ec. 1.17 a una forma más familiar.

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2 \tag{1.18}$$

Debe tenerse cuidado al expresar la energía cinética de un cuerpo rígido. Muchas veces un problema aparentemente difícil en vibración mecánica, resulta parecer así por un mal entendimiento de la cinética básica.

La energía potencial puede deberse a la posición o a la deformación. La energía potencial de posición, es el trabajo que debe realizarse contra una fuerza de campo para cambiar la posición de una partícula. Si debe realizarse trabajo sobre una partícula para cambiar su posición, se aumenta su energía potencial. Si la partícula realiza trabajo al cambiar su posición, disminuye su energía potencial. La energía potencial puede también producirse por elementos elásticos que han sido estirados, comprimidos, torcidos o deformados de alguna otra manera. Esta energía potencial, es la energía de fatiga o deformación y algunas veces se le denomina energía elástica.



Si la energía potencial de una partícula o de un sistema depende sólo de la posición o de la configuración de la partícula o de las partículas dentro del sistema, se dice que éste es *conservativo*. Según esto implica, la energía potencial de un sistema conservativo, es independiente de las posiciones o configuraciones a través de las cuales pasa el sistema, y depende solamente de sus estados inicial y final. Ya que debe calcularse con respecto a cierta posición o configuración seleccionadas, que se conocen como referencia y son arbitrarias, la energía potencial no tiene un valor absoluto en un sistema conservativo. El trabajo neto realizado por una partícula que retorna a su posición o estado de movimiento original, en un sistema conservativo, es cero.

Los métodos de energía implican un *balance de energía* con utilización de escalares, más bien que un *balance de fuerzas* que utilice vectores. *Si no se realiza trabajo y no se pierde energía por fricción, cualquier aumento en la energía de un sistema conservativo debe aumentar la energía cinética del sistema, o almacenarse como energía potencial o interna.* Este principio de conservación se conoce comúnmente como el de la *Conservación de la Energía* o como la *Primera Ley de la Termodinámica.*

Las fuerzas de fricción son no conservativas, ya que no son función de la posición o configuración, y la energía que se disipa no es recuperable. Aunque un sistema real debe incluir la fricción y, por tanto, ser no conservativo, con frecuencia es conveniente despreciar las pérdidas por fricción, en los problemas sobre vibración.

## 1.8. IMPULSO Y MOMENTUM

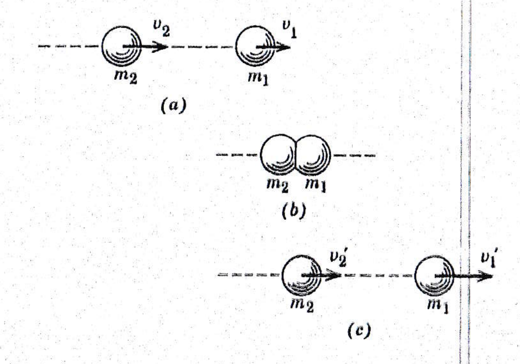
Se define como *impulso* lineal, al producto de la fuerza y el tiempo. Este es una cantidad vectorial que tiene la dirección de la fuerza resultante. El *momentum* lineal es el producto de la masa y de la velocidad lineal. El momentum angular es el producto del momento de inercia y velocidad angular de la masa. El momentum lineal y el momentum angular, son también cantidades vectoriales, y se pueden componer y descomponer de la misma manera que la fuerza y el impulso.

Una declaración alterna de la segunda ley del movimiento, de Newton, es que la resultante de un sistema de fuerzas no equilibrado, debe ser igual al régimen de cambio en el tiempo, del momentum del centro de masa. Para el momentum lineal, éste sería

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G) \tag{1.19}$$

Se denomina *impacto* a la colisión entre dos cuerpos en la que se producen fuerzas relativamente grandes a través de un intervalo de tiempo relativamente pequeño. Durante la colisión se absorbe energía cinética, al deformarse los

**Fig. 1.7**




cuerpos que sufren el impacto. Le sigue después un periodo de recuperación, que puede ser completa o no. Si ocurre una recuperación completa de la energía de deformación, el impacto es elástico. Si la recuperación de energía no es completa, el impacto es inelástico. Después de la colisión, los cuerpos continúan moviéndose con velocidades cambiadas. Ya que las fuerzas de contacto sobre un cuerpo son iguales y opuestas a las fuerzas de contacto en el otro, se conserva la suma de momentum lineal para los dos cuerpos. La ley de la *conservación del momentum* establece que *el momentum de un sistema de cuerpos no cambia si no existe fuerza externa resultante sobre el sistema.*

Para dos cuerpos que sufren impacto y se separan, la relación entre la velocidad de separación $v_1' - v_2'$ y la velocidad de aproximación $v_2 - v_1$ se denomina el coeficiente de restitución, $e$. La Fig. 1.7 muestra un impacto semejante.

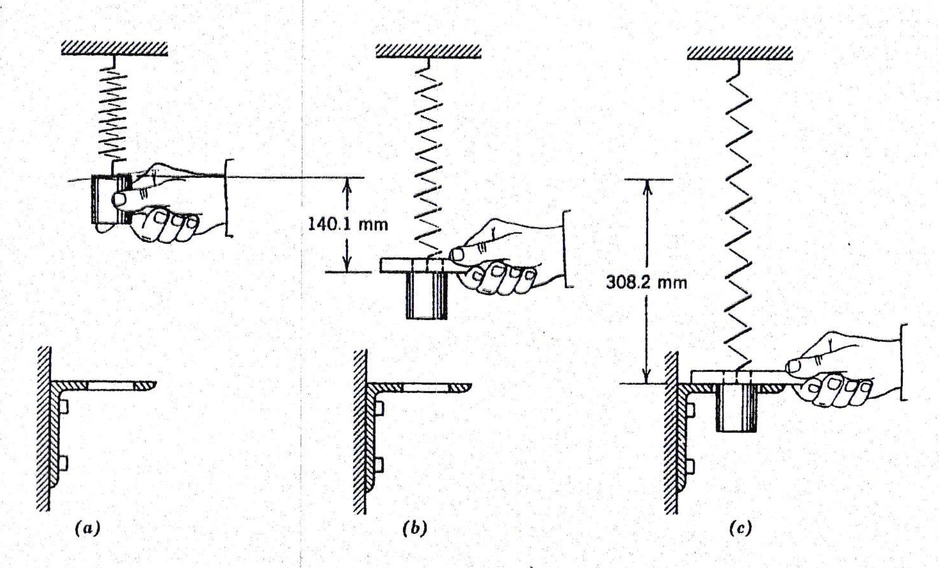
$$e = \frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} \tag{1.20}$$

Su valor dependerá de la forma y propiedades del material de los cuerpos en colisión. En el impacto elástico, el coeficiente de restitución vale uno y no hay pérdida de energía. Un coeficiente de restitución de 0, indica un impacto perfectamente inelástico o plástico, en el que no hay separación de los cuerpos después de la colisión, y es máxima la pérdida de energía. En el impacto oblicuo, el coeficiente de restitución se aplica solamente a aquellas componentes de velocidad sobre la línea de impacto, o normales al plano de impacto.

## PROBLEMA EJEMPLO 1.34

Como ejemplo de los principios de conservación de la energía y momentum, consideremos un resorte helicoidal fijo en su extremo superior y que soporta una masa de 5 kg en su extremo inferior. La constante de proporcionalidad del resorte es de 350 N/m. Se puede colocar un collarín con una masa de 6 kg,

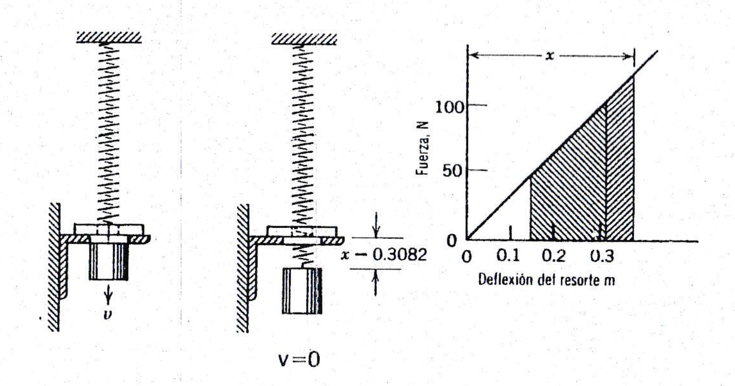





sobre la parte superior de la primera masa. Inicialmente, el resorte y la masa de 5 kg están en reposo, con la cara superior de la masa de 5 kg a 168.1 mm por arriba de una plataforma horizontal. La plataforma tiene una abertura a través de la cual puede pasar la masa de 5 kg, pero no el collarín de 6 kg. Descríbase el movimiento a través de un ciclo completo.

***Solución:***

Si la constante de proporcionalidad es de 350 N/m, el resorte se extenderá 140.1 mm a partir de su longitud libre cuando soporte sólo la masa de 5 kg. Si se coloca cuidadosamente el collarín de 6 kg sobre la parte superior de la primera masa, y se soporta manualmente al irse extendiendo el resorte helicoidal hasta una nueva posición de equilibrio, el resorte, la masa y el collarín llega-



rán al reposo, habiéndose extendido el resorte 308. 2 mm a partir de su longitud libre, y la cara superior de la masa de 5 kg estará enrasada con la cara superior de la plataforma, y la cara inferior del collarín de 6 kg estará tocando, pero sin estar soportada por, la plataforma.

Por otro lado, si se coloca el collarín sobre la primera masa, y se le libera, ambas masas se moverán hacia abajo con velocidad creciente, la masa de 5 kg pasará a través de la abertura, y continuará descendiendo, pero el collarín será detenido por la plataforma. La masa de 5 kg invertirá su dirección, pasará ascendiendo a través de la abertura de la plataforma y recogerá otra vez al collarín. Este ciclo se repetirá hasta que todo el sistema llegue al reposo en la misma posición que habría tenido si el collarín se hubiera puesto en sitio cuidadosamente.

Para la primera fase, debe conservarse la energía

$$\Delta Ve + \Delta Vg + \Delta T = 0$$

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(5+6)(v^2 - 0)$$

$$\Delta Vg = -(5+6)(9.8065)(0.3082 - 0.1401)$$

$$\Delta Ve = \tfrac{1}{2}(350)(\overline{0.3082^2} - \overline{0.1401^2})$$

$\Delta T$ y $\Delta Ve$ son positivas, ya que ambas representan un aumento en energía. $\Delta Vg$ es negativa, ya que la energía potencial de posición, tanto para la masa de 5 kg como para la masa de 6 kg, disminuye. Se toma como referencia original la longitud del resorte.

$$\tfrac{1}{2}(350)(\overline{0.3082^2} - \overline{0.1401^2}) - (5+6)(9.8065)(0.3082 - 0.1401) + \tfrac{1}{2}(5+6)(v^2 - 0) = 0$$

$$v = 0.948 \text{ m/s}$$

Cuando la masa de 5 kg pasa a través de la abertura de la plataforma, se conserva su energía cinética. Después se invertirá su dirección y retornará para golpear al collarín con la misma velocidad que tenía en el instante de la separación, $v$ = 0.948 m/s. La energía cinética del collarín se pierde en el impacto.

Sea $x$ el desplazamiento máximo de la masa de 5 kg

$$\Delta Ve + \Delta Vg + \Delta T = 0$$

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(5)(0 - \overline{0.948^2})$$

$$\Delta Vg = -(5)(9.8065)(x - 0.3082)$$

$$\Delta Ve = \tfrac{1}{2}(350)(x^2 - \overline{0.3082^2})$$

$$\tfrac{1}{2}(350)(x^2 - \overline{0.3082^2}) - (5)(9.8065)(x - 0.3082) - \tfrac{1}{2}(5)(\overline{0.948^2}) = 0$$



Esta se reduce a una ecuación cuadrática,

$$x^2 - 0.2802x - 0.02148 = 0$$

$$x = 0.3428 \text{ m}, \ -0.06265 \text{ m}$$

Sólo tiene significado el valor positivo. El desplazamiento máximo del peso correspondiente a 5 kg es de 34.6 mm por abajo de la plataforma (0.3428 — 0.3082 = 0.0346 mm).

Cuando la masa de 5 kg golpea al collarín al pasar ascendiendo a través de la abertura en la plataforma, se conserva el momentum. El momentum lineal de la masa de 5 kg es 4.74 kg·m/s. Antes del impacto, el collarín no tiene momentum lineal. Después del impacto, el momentum de los dos pesos al moverse hacia arriba, debe ser de 4.74 kg·m/s

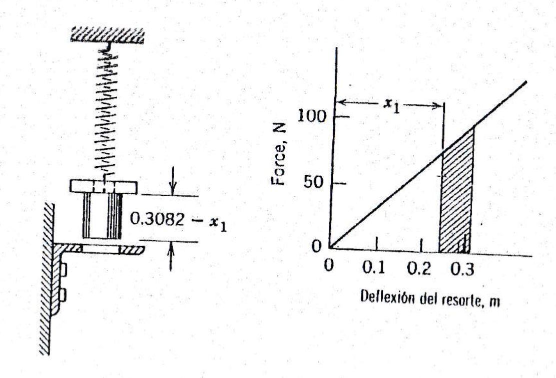
$$0 + (5)(0.948) = (5+6)v_1$$

$$v_1 = 0.431 \text{ m/s}$$

Ya que se mueven conjuntamente, ambas masas deben tener la misma velocidad. Esto significa que parte de la energía cinética de la masa de 5 kg se pierde como resultado del impacto.

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}(5)(\overline{0.948^2} - \overline{0.431^2}) = 1.7 \text{ N}\cdot\text{m perdidos}$$

Después de que el collarín de 6 kg y la masa de 5 kg dejan la plataforma, se moverán hacia arriba hasta que toda la energía cinética se transfiera a energía potencial de posición, o se almacene como energía elástica en el resorte. Sea



el desplazamiento a partir de esa posición $x_1$,

$$\Delta Ve + \Delta Vg + \Delta T = 0$$

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(5+6)(0-\overline{0.431^2})$$

$$\Delta Vg = (5+6)(9.8065)(0.3082 - x_1)$$

$$\Delta Ve = \tfrac{1}{2}(350)(x_1^2 - \overline{0.3082^2})$$

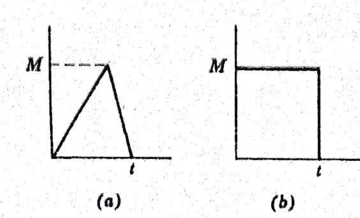
Resolviendo para $x_1$,

$$x_1^2 - 0.6164x_1 + 0.08915 = 0$$

$$x_1 = 0.2318 \text{ m}$$

que es 0.0764 m arriba de la plataforma. El ciclo se repetirá ahora hasta que se disipe toda la energía de movimiento, y el sistema llegue al reposo.

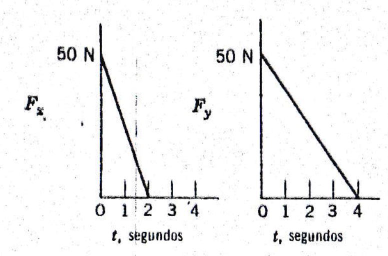
---




**PROBLEMA 1.35**

Un impulso angular que actúa sobre un volante, de acuerdo con la Fig. *a*, aumenta la velocidad de éste de 20 a 40 rpm. Si actuara de acuerdo con el diagrama de impulso de la Fig. *b*, ¿cuál sería la velocidad final en rpm?

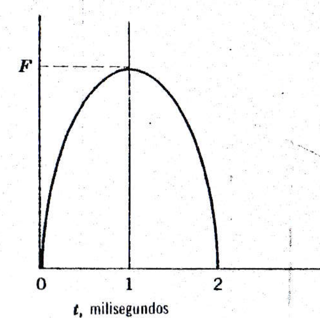
Respuesta: 60 rpm.




**PROBLEMA 1.36**

Una partícula que pesa 4 kg se mueve en el plano horizontal *x-y* bajo la acción de las fuerzas $F_x$ y $F_y$, que varían con el tiempo según se muestra. Si la partícula parte del reposo cuando $t = 0$, ¿cuál será su velocidad a los 4 s?

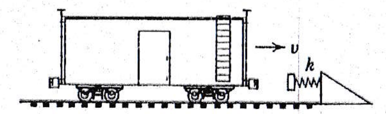
Respuesta: 28 m/s




**PROBLEMA 1.37**

Una pelota de baseball con una masa de 145 m/s, llega al bateador con una velocidad de 25 m/s y después de ser bateada, deja el bat con una velocidad de 40 m/s en dirección opuesta. Encuéntrese la fuerza máxima de la pelota sobre el bat, si la fuerza de contacto se puede aproximar por la semielipse mostrada.






**PROBLEMA 1.38**

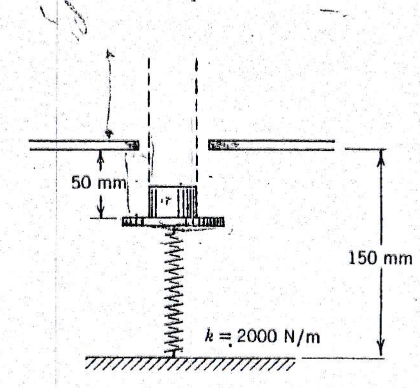
Un carro de ferrocarril con una masa de 15 000 kg y que rueda sobre una vía nivelada, se lleva a reposo por medio de un resorte parachoques. El resorte se deforma 200 mm y tiene un módulo de 130 kN/m. ¿Con qué velocidad golpeó el carro al resorte?

Respuesta: $v = 0.589$ m/s

**PROBLEMA 1.39**

Una masa de 2 kg descansa sobre una plataforma soportada por un resorte, que se ha comprimido 100 mm en la posición mostrada. Después de moverse 50 mm, la plataforma es detenida por topes. Determínese la altura máxima alcanzada por el peso. El módulo del resorte es 2 000 N/m.

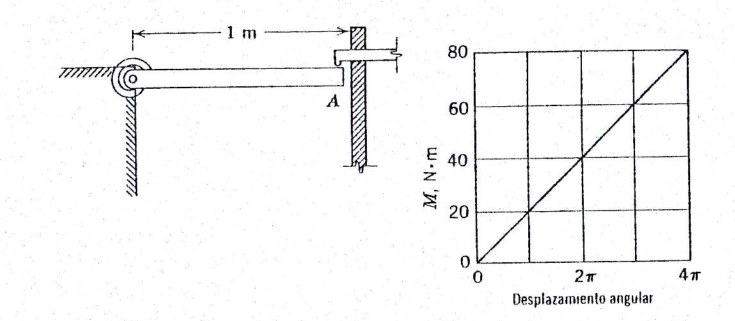
Respuesta: $h = 382.4$ mm

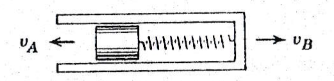



**PROBLEMA 1.40**

La barra uniforme de 10 kg está proyectada para saltar elásticamente cuando se libera la sujeción en el extremo *A*. Un resorte helicoidal apretadamente enrollado, ejerce un momento de 80 N·m sobre el eslabón en la articulación 0. El resorte está arrollado dos revoluciones a partir de su posición libre. Se incluye el diagrama momento-desplazamiento para el resorte helicoidal. Determínese la velocidad angular de la barra al pasar a través de la posición vertical.

Respuesta: $\omega = 6.4$ rad/s

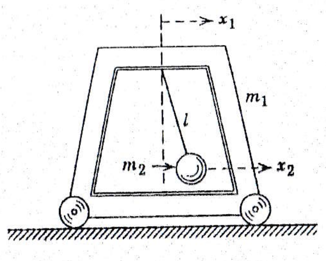



**PROBLEMA 1.41**

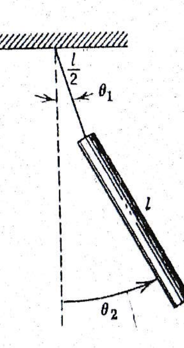
El bloque de 0.3 kg, ajusta flojamente en un cilindro de 3 kg, y el resorte se encuentra bajo una compresión inicial de 80 mm. Encuéntrense las velocidades finales adquiridas por el bloque y el cilindro. El módulo del resorte es de 1 750 N/m. Despréciese la fricción y supóngase que el conjunto está colocado sobre una superficie horizontal lisa.

Respuesta: $v_A = 5.826$ m/s; $v_B = 0.3826$ m/s




**PROBLEMA 1.42**

Un bastidor soporta un péndulo de longitud $l$, que oscila libremente en el mismo plano en el que se mueve el bastidor. Obténganse expresiones para la energía cinética y para la energía potencial del sistema, en términos de las coordenadas generalizadas $x_1$ y $x_2$.

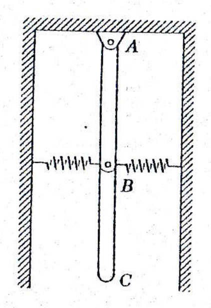



**PROBLEMA 1.43**

Determínese una expresión para la energía cinética de una barra delgada suspendida como péndulo, de un alambre ligero, en términos de las coordenadas generalizadas($\theta_1$ y $\theta_2$. Háganse aproximaciones para oscilaciones pequeñas.

Respuesta: $T=\frac{1}{24}ml^2[3\dot{\theta}_1{}^2+6\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+4\dot{\theta}_2{}^2]$






**PROBLEMA 1.44**

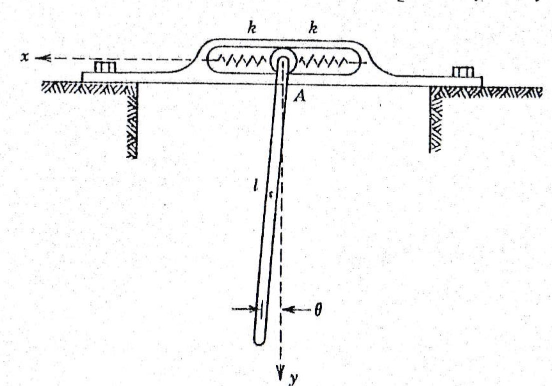
Determínese una expresión para la energía cinética total del sistema, que consiste de dos barras esbeltas articuladas en $A$ y $B$.

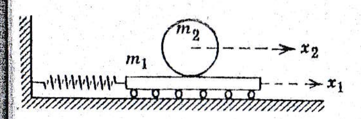
Respuesta: $T=\frac{1}{6}ml^2[4\dot{\theta}_1{}^2+3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2{}^2]$

**PROBLEMA 1.45**

Determínese una expresión para la energía cinética de la barra rígida delgada que está soportada como péndulo en el extremo $A$, tiene una masa $m$, y también está empernada a un rodillo y mantenida en sitio por dos resortes elásticos de constante $k$.

Respuesta: $T=\frac{1}{6}ml^2\left[\dot{\theta}^2+\frac{3m\dot{x}\dot{\theta}}{l}+\frac{3\dot{x}^2}{l^2}\right]$




**PROBLEMA 1.46**

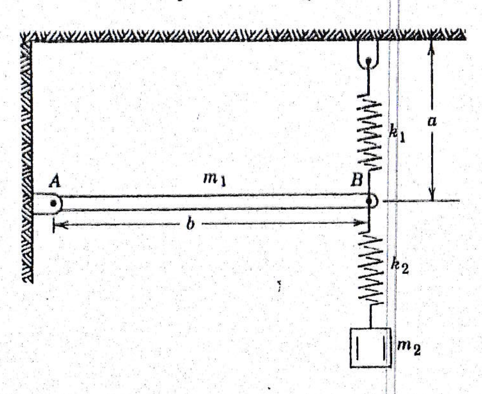
Una plataforma de masa $m_1$, soporta un cilindro circular de masa $m_2$, que está soportado elásticamente de la pared por un resorte de módulo $k$. Determínese una expresión para la energía cinética del sistema, en términos de las coordenadas generalizadas $x_1$ y $x_2$, si el cilindro rueda sin deslizar, y $m_1 = m_2 = m$. La plataforma se mueve con fricción despreciable sobre la superficie $A$.

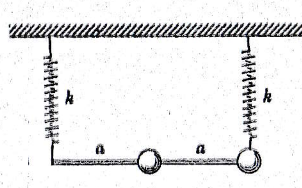
Respuesta: $T=\frac{1}{4}m[3\dot{x}_1{}^2-2\dot{x}_2\dot{x}_1+3\dot{x}_2{}^2]$

## PROBLEMA 1.47

Determínese una expresión para la energía cinética total del sistema, que consiste de una barra esbelta con masa $m_1$, articulada en $A$ y soportada por un resorte de rigidez $k_1$ en $B$, y que a su vez soporta un resorte y una masa $k_2$ y $m_2$.

Respuesta: $T=\frac{1}{6}[m_1\dot{x}^2+3m_2\dot{x}_2^2]$

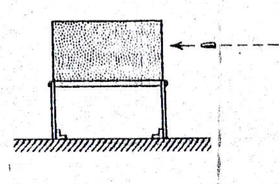



## PROBLEMA 1.48

Dos resortes idénticos soportan una barra rígida y dos masas idénticas. Selecciónense las coordenadas que describan el movimiento de cada masa. Determínese una expresión para la energía cinética del sistema, en términos de las coordenadas determinadas por el alumno.

Respuesta: $T=m\dot{x}^2+\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}^2$

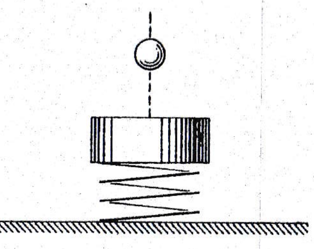


## PROBLEMA 1.49

En una prueba balística, se dispara una bala de 10 g con una velocidad de 350 m/s, dentro de una caja llena de arena, que descansa sobre un bastidor de acero. El bastidor de acero y la caja con arena tienen en conjunto una masa de 5 kg. El bastidor de acero se deforma 5 mm bajo una fuerza horizontal de 200 N. Determínese la deformación máxima del bastidor cuando se dispara la bala dentro de la caja con arena.

Respuesta: $x$ = 7.8 mm





## PROBLEMA 1.50

Se deja caer una bola de acero de 50 gm, desde el reposo, a través de una altura vertical de 2 m. El impacto se realiza sobre un cilindro sólido de acero de masa de 0.45 kg. El cilindro se halla soportado por un resorte ligero con módulo de 1 600 N/m. El cilindro se mueve un máximo de 12 mm a partir de la posición de equilibrio elástico, como resultado del impacto. Calcúlese la altura a la cual rebotará la bola y el coeficiente de restitución para el impacto.

Respuesta: $h'$ = 54.5 mm; e = 0.282

# DOS

# MOVIMIENTO PERIODICO

## 2.1 INTRODUCCION

Al observar el diario ascenso y descenso de las mareas, y escuchar el permanente zumbido de la maquinaria industrial, el hombre vive constantemente interesado y fascinado por el movimiento periódico. El balanceo de un árbol con el viento, el cabeceo y los bandazos de un barco en el mar, y la rotación de un generador en sus cojinetes, conducen a variaciones cíclicas de la fuerza y el desplazamiento. Estos movimientos, visibles al ojo o perceptibles por el cuerpo, han desafiado al hombre desde el comienzo del tiempo. El estudio de estas variaciones cíclicas o periódicas, constituye el estudio de la vibración, y es uno de los aspectos más importantes de la dinámica.

Con frecuencia, los problemas de vibración son complicados. Es fácil comprender el movimiento de un péndulo simple, pero la trepidación y la oscilación irregular en las aeronaves, requirieron años de investigación y estudios exhaustivos antes de que se resolviera el problema en cualquiera de los sentidos de la palabra. Al comprenderse y controlarse los problemas, surgen otros problemas nuevos e inesperados. También con frecuencia, éstos se ocasionan por no más que pequeños cambios en los procedimientos de fabricación, leves errores en el maquinado, o el rediseño de partes de un sistema.

Se puede clasificar a la vibración de varias maneras. Una vibración *libre* ocurre sin la aplicación de fuerzas por el exterior. Por lo general, la vibración libre surge cuando se desplaza un sistema elástico, o se le proporciona cierta velocidad inicial, como podría resultar en una aeronave. Una vibración *forzada* ocurre con la aplicación de fuerzas exteriores. Las vibraciones forzadas pueden ser *periódicas*, *aperiódicas*, o *aleatorias*. El movimiento periódico simplemente se repite a sí mismo en intervalos de tiempo regulares. En el movimiento aperiódico o aleatorio, no existen tales intervalos regulares. Tanto

las vibraciones libres como forzadas, pueden ser *amortiguadas*, que es el término usado en el estudio de la vibración para denotar una disipación de energía. Las vibraciones se clasifican también por el número de *grados de libertad* del movimiento. El número de *grados de libertad* corresponde al *número de coordenadas independientes* que es necesario para describir por completo el movimiento.

Un problema particular de estudio, se puede describir por más de una clasificación. Esto es, la vibración forzada amortiguada, es un movimiento que es forzado exteriormente, en tanto se disipa la energía.

Si las fuerzas disipativas son proporcionales a la velocidad del movimiento, las fuerzas de restauración proporcionales al desplazamiento, y las fuerzas de inercia proporcionales a la aceleración, se dice que una vibración es *lineal*. Si no se satisface alguna de estas proporcionalidades, se dice que la vibración es *no lineal*. La terminología se ha tomado prestada de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. La linealidad es importante, ya que las ecuaciones diferenciales lineales pueden ser resueltas con mayor facilidad. La vibración no lineal, puede a veces linealizarse restringiendo el estudio del movimiento a *vibraciones pequeñas*.

## 2.2 VIBRACION LIBRE

Considérese un resorte elástico deformado por una fuerza aplicada, **f**. Se le denomina elástico porque obedece la ley de Hooke, variando linealmente la fuerza **f** con el desplazamiento **x**. La constante de proporcionalidad del resorte, es la constante del resorte, o módulo $k$ del resorte, la pendiente de la curva fuerza-desplazamiento. Las unidades del módulo del resorte son kgf/cm. La fuerza del resorte es entonces

$$\mathbf{f} = k\mathbf{x} \tag{2.1}$$

La Fig. 2.1 muestra descriptivamente la variación de $f$ con respecto a $x$.

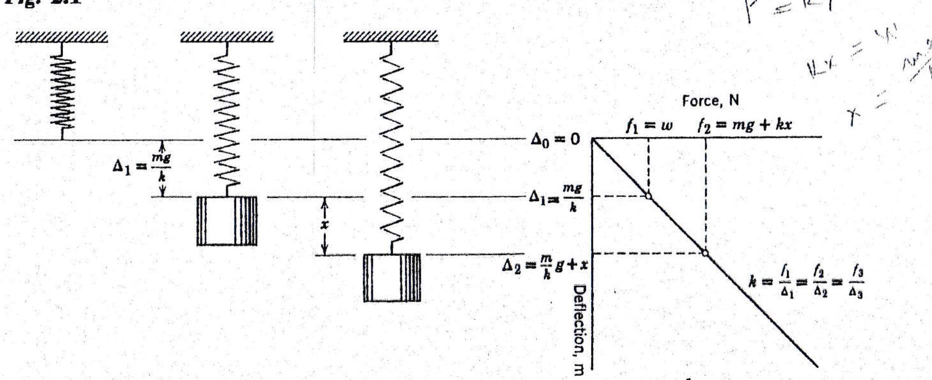
Si se sujeta una masa $m$ al extremo inferior del resorte y se permite que el resorte y la masa se muevan hasta una posición de equilibrio, el resorte se deformará verticalmente una distancia $\Delta = mg/k$ a partir de su posición libre, y la fuerza del resorte será igual al peso de la masa suspendida.

Si se mueve la masa desde esta nueva posición de equilibrio, oscilará alrededor de ésta. Usando la segunda ley del movimiento, de Newton, la ecuación del movimiento, para cualquier desplazamiento **x** es $\Sigma F = m\ddot{x}$, la que que se puede escribir como una ecuación diferencial lineal de segundo orden en términos de la coordenada única **x**

$$-W + mg - kx = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.2}$$



Fig. 2.1




Para este problema relativamente simple, no es difícil comprender que la solución será armónica. Esto se puede verificar sustituyendo una función ya sea exponencial o trigonométrica. Para la solución de prueba de la ecuación homogénea, sea

$$x = Ce^{rt}$$
$$\dot{x} = rCe^{rt}$$
$$\ddot{x} = r^2Ce^{rt}$$

La sustitución muestra que la solución de prueba es una integral de la ecuación diferencial si se satisface la *ecuación característica*.

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0 \tag{2.3}$$

La cantidad $\sqrt{k/m}$ es la frecuencia del movimiento armónico, en radianes por segundo, y por lo general, se le denomina la *frecuencia circular natural*, $\omega_n$.

La ecuación característica tiene dos raíces,

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{-\omega_n^{\,2}} \tag{2.4}$$

Estas raíces se denominan los *valores característicos* o *valores propios*, o *autovalores* de la ecuación característica.

Existen dos integrales particulares de la Ec. 2.2

$$x_1 = C_1e^{i\omega_n t}$$
$$x_2 = C_2e^{-i\omega_n t}$$

Si sustituimos ambas soluciones en la Ec. 2.2 y sumanos, la suma satisface también la ecuación de movimiento y tiene el número requerido de constantes arbitrarias. Entonces, la solución general es

$$x = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{2.5}$$

siempre que $x_1$ y $x_2$ no sean linealmente dependientes. La integral general se puede escribir también en forma hiperbólica,

$$x = (C_1 + C_2)\cosh i\omega_n t + (C_1 - C_2)\operatorname{sen h} i\omega_n t \tag{2.6}$$

o en forma trigonométrica,

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \tag{2.7}$$

$C_1$, $C_2$, $A$ y $B$ son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones de movimiento. Si se hubiera seleccionado el extremo libre del resorte, en lugar de la posición de equilibrio, como origen para la coordenada $x$, se habría añadido un término $mg/k$ a las Ecs. 2.6 y 2.7. Este término es un término estático, y no es de importancia en la dinámica. Siempre se le puede eliminar si se selecciona la posición de equilibrio como origen para la coordenada $x$.

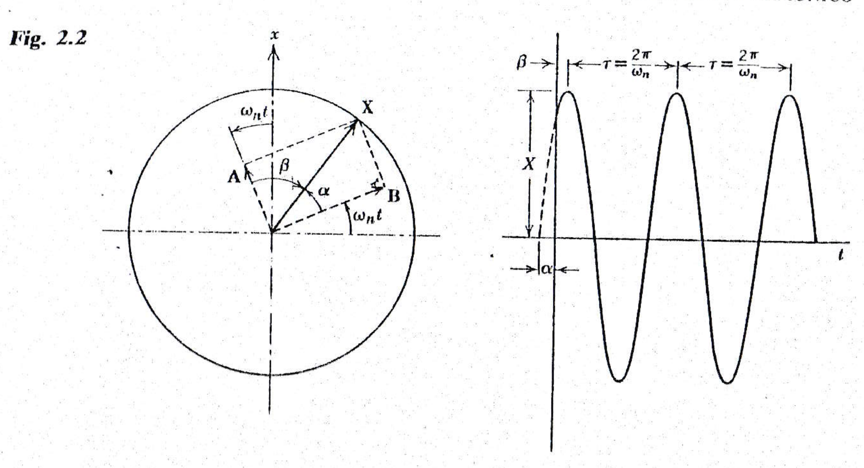
## 2.3 MOVIMIENTO ARMONICO

Las Ecs. 2.5, 2.6 y 2.7 son funciones armónicas del tiempo. El movimiento es simétrico alrededor de la posición de equilibrio. La velocidad es máxima y la aceleración es cero cada vez que la masa pasa a través de esta posición. En los desplazamientos extremos, la velocidad es cero y la aceleración es un máximo. Esta es la forma más simple de vibración, y se denomina con frecuencia *movimiento armónico simple*. Este movimiento es típico de la mayor parte de los sistemas con un grado único de libertad que se ha desplazado desde una posición de equilibrio estático, en una pequeña cantidad y se ha liberado. Modela con precisión un sorprendente número de sistemas reales.

Con frecuencia es conveniente usar un diagrama vectorial para representar visualmente el movimiento armónico. En la Fig. 2.2 el desplazamiento $x$ es la suma de las proyecciones sobre el eje $x$ de los dos vectores **A** y **B**, que giran alrededor del origen en una velocidad angular $\omega_n$ y a ángulo recto entre sí. El desplazamiento angular de cualquiera de los vectores, en cualquier momento, $t$ es $\theta = \omega_n t$. Este desplazamiento se mide a partir de las posiciones originales de los vectores **A** y **B** en el tiempo $t = 0$, en el eje vertical para el vector **A** y en el eje horizontal para el vector **B**. Las magnitudes $A$ y $B$ dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

El movimiento llevado a cabo en cualquier periodo, se llama un *ciclo* e inversamente, el periodo $\tau$ es el tiempo necesario para completar un ciclo de movimiento

Fig. 2.2




$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.8}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Algunas veces es conveniente describir el periodo del movimiento armónico, que generalmente se da en segundos, y otras es conveniente hablar de la frecuencia de movimiento, el número de ciclos que se completa en cualquier unidad de tiempo. La unidad conveniente para la frecuencia es el hertz (Hz) que es un ciclo por segundo (cps). El uso del hertz es una práctica normalizada en muchos países europeos y se aplica ampliamente en la electrónica, acústica y en la mayor parte de los campos científicos. Para la frecuencia natural de un sistema vibratorio, se usa el símbolo $f_n$.

Estamos limitados a dos constantes arbitrarias, pero éstas no necesitan ser ambas amplitudes. A veces es más conveniente pensar en términos de una amplitud, y de un ángulo de fase

$$x = X \operatorname{sen}(\omega_n t + \alpha) \tag{2.9a}$$

o

$$x = X \cos(\omega_n t - \beta) \tag{2.9b}$$

Los desplazamientos $(\omega_n t + \alpha)$ y $(\omega_n t - \beta)$ se miden a partir de los ejes horizontal y vertical respectivamente, que, otra vez, son las posiciones generales para la iniciación del movimiento para los vectores **A** y **B**. $X$, $\alpha$ y $\beta$ son nuevas constantes arbitrarias que se pueden describir en términos de $A$ y $B$.

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (2.10)$$

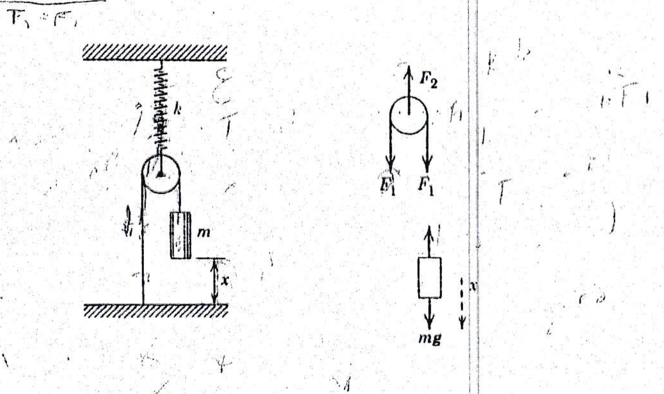
$$\tan \beta = \frac{B}{A} = \cot \alpha \qquad (2.11)$$

El término $X$ es la *amplitud máxima* o valor pico del desplazamiento.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 2.1*

Determínese la frecuencia natural del sistema de resorte masa y polea mostrados. El resorte tiene un módulo de $k$, y la polea puede considerarse como desprovista de fricción y de masa despreciable.




***Solución:***
Una coordenada generalizada para este sistema, es el desplazamiento de la masa $m$. El desplazamiento de la polea y la deformación del resorte se pueden describir ambos en términos de $x$, el desplazamiento de la masa $m$, a partir de su posición de equilibrio estático. Por estática simple,

$$F_2 = 2F_1 = k\left(\frac{x}{2}\right) + 2mg$$

y de la segunda ley del movimiento, de Newton, $\Sigma \mathbf{F}_x = m\ddot{x}$

$$mg - F_1 = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{(k(x/2) + 2\,mg)}{2} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

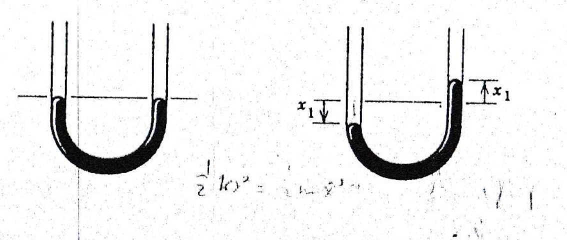


Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, similar a la Ec. 2.2. A partir de esta ecuación, la frecuencia natural es

$$f_n = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

## *PROBLEMA EJEMPLO 2.2. EL MANOMETRO*

Determínese la frecuencia natural de un manómetro de tubo en U abierto en ambos extremos y que contiene una columna de mercurio líquido de longitud $l$ y densidad $\gamma$.




***Solución:***
La coordenada $x$, establecida como el desplazamiento de los meniscos del manómetro a partir de su posición de equilibrio, describe por completo el movimiento del fluido en el manómetro y reconoce la restricción del fluido dentro del tubo del mismo. Por tanto, ésta es una coordenada generalizada. $A$ es la sección transversal del tubo y es uniforme. La carga de presión actúa sobre la sección transversal, y en dirección opuesta a la aceleración $\ddot{x}$. Usando la segunda ley de Newton para el movimiento,

$$\sum \mathbf{F}_x = m\ddot{\mathbf{x}}$$

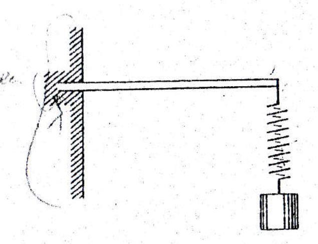
$$-2A\gamma x = \frac{A\gamma l}{g}\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0$$

Esta es también una ecuación diferencial lineal de segundo orden, análoga a la Ec. 2.2. La frecuencia, para pequeñas oscilaciones, es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

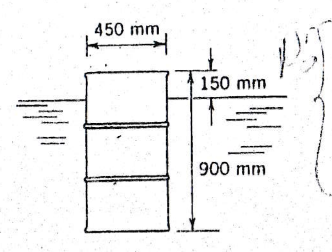
---



**PROBLEMA 2.3**

Se suspende una masa de 25 kg, de un resorte de módulo 2 N/mm el que a su vez está suspendido en su extremo superior de un viga de acero delgada, en voladizo, de espesor de 3 mm y anchura de 20 mm y longitud de 250 mm. Determínese la frecuencia natural del movimiento del peso.

Respuesta: $f_n$ = 0.899 Hz




**PROBLEMA 2.4**

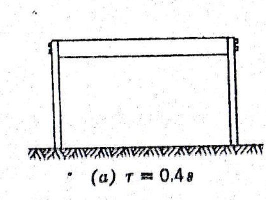
Un tambor para petróleo parcialmente lleno, flota en el mar. Determínese la frecuencia del movimiento vertical cuando el tambor flota oscilando hacia arriba y hacia abajo. La densidad del agua de mar es de 1.025.

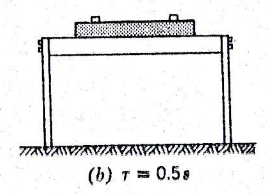
Respuesta: $f_n$ = 0.576 Hz

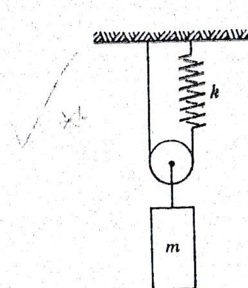
**PROBLEMA 2.5**

Una mesa pesada se soporta por patas de acero planas. Su periodo natural en el movimiento horizontal es de 0.4 s. Cuando se sujeta sobre la superficie de la mesa una placa de 30 kg, el periodo natural en el movimiento horizontal aumenta a 0.5 s. ¿Cuáles son la constante efectiva de resorte y la masa de la mesa?

Respuesta: 120 kg; 37 N/mm


(a) $\tau$ = 0.4 s


(b) $\tau$ = 0.5 s

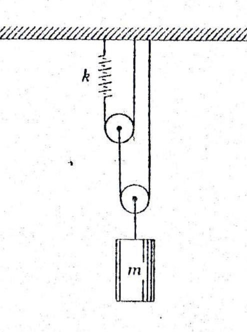



**PROBLEMA 2.6**

Determínese la frecuencia natural, para pequeñas oscilaciones, del sistema de masa única mostrado. La masa de la polea es despreciable.

Respuesta: $f_n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

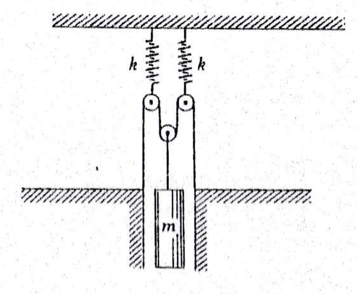





**PROBLEMA 2.7**

Determínese la frecuencia natural, para pequeñas oscilaciones, del sistema mostrado. Las masas y fricciones en las poleas son despreciables.

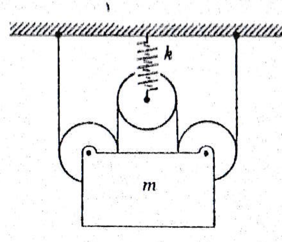
Respuesta: $f_n = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$




**PROBLEMA 2.8**

La masa $m$ está soportada por un sistema de poleas y dos resortes de módulos idénticos $k$. Determínese la frecuencia natural del sistema.

Respuesta: $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$



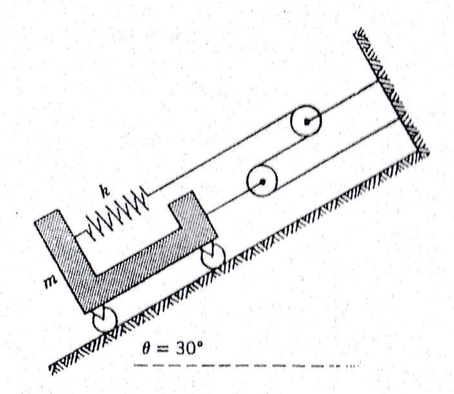

**PROBLEMA 2.9**

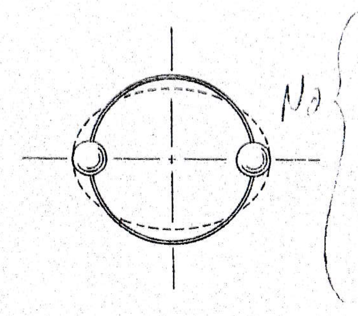
La masa $m$ está suspendida de dos poleas alrededor de las cuales pasa una cuerda sin peso. El resorte tiene un módulo de $k$. Determínese la frecuencia natural del sistema.

Respuesta: $f_n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

**PROBLEMA 2.10**

El carro está conectado a la pared por medio de una cuerda y poleas. La flexibilidad del cable se puede representar por un resorte con un módulo $k$. Determínese la frecuencia natural del sistema de carro, cuerda y poleas. Despréciense la fricción y las masas de la cuerda, poleas y ruedas. ¿Cuál será la frecuencia natural si el ángulo de la pendiente se cambia a $\theta$ = 60°?



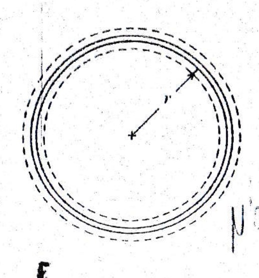



**PROBLEMA 2.11**

Se fijan dos esferas, de masa $m$ cada una, a un aro delgado de masa despreciable. Determínese la frecuencia natural de oscilación libre del aro y de las dos masas.

*Indicio:* La deformación diametral del aro delgado, bajo compresión, es $\delta = 0.149(Pr^3/EI)$, en donde $P$ es la carga de compresión, $r$ es el radio y $EI$ es la rigidez flexional del aro.

Respuesta: $\omega_n = 3.66\sqrt{\dfrac{EI}{mr^3}}$




**PROBLEMA 2.12**

Determínese la frecuencia natural más baja de un anillo de radio $r$ y densidad de masa $\rho$ que vibra en dirección radial.

*Indicio:* La deformación circunferencial $\epsilon = u/r$ en donde $u$ es el desplazamiento radial.

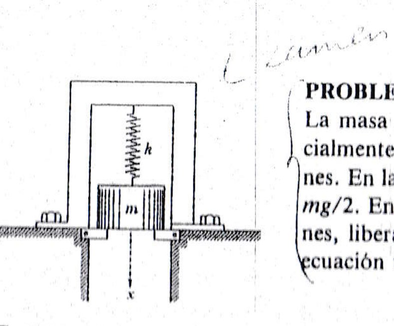
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{E}{\rho r^2}}$

**PROBLEMA 2.13**

Resuélvase el Prob. 2.12, para una esfera delgada de radio $r$.

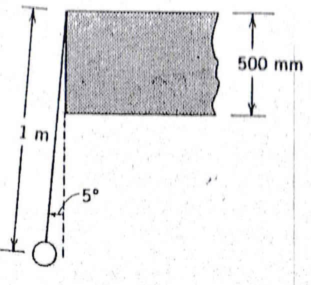
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2E}{\rho r^2}}$





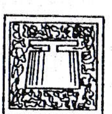

**PROBLEMA 2.14**

La masa $m$ se encuentra en reposo, soportada parcialmente por el resorte y parcialmente por los detenes. En la posición mostrada, la fuerza del resorte es $mg/2$. En el momento $t = 0$, se hacen girar los detenes, liberando súbitamente la masa. Determínese la ecuación transitoria de movimiento.



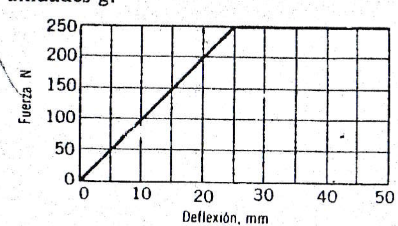

**PROBLEMA 2.15**

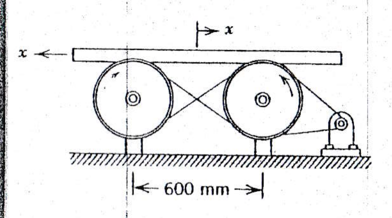
Se sujeta de una cuerda que tiene un metro de longitud una masa de 1 kg como péndulo. Se le libera desde el resposo cuando $\theta = 5°$. Determínese la amplitud al otro extremo de la oscilación del péndulo y el periodo del péndulo.



**PROBLEMA 2.16**

Un vaso frágil, de vidrio, de 5 kg, se empaca en hule esponja desmenuzado y se coloca en una caja de cartón que tiene un peso despreciable. La caja cae entonces accidentalmente desde una altura de 1 m. Este hule esponja particular presenta una curva fuerza-deflexión por volumen, como se muestra. Determínese la deformación máxima del empaque dentro de la caja y la máxima aceleración del vaso, en unidades g.



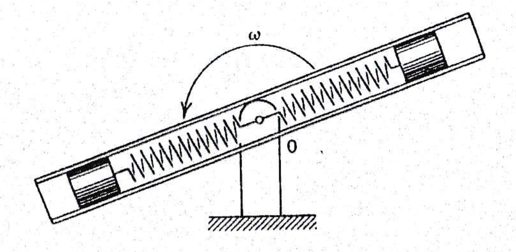

**PROBLEMA 2.17**

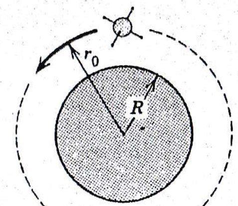
Un dispositivo proyectado para medir el coeficiente de fricción cinética, consiste de dos poleas de ranura en V de 90°, que giran en sentidos opuestos y a través de las cuales se coloca una barra cilíndrica de un material conocido. Al desplazarse la barra, realizará un movimiento armónico simple. Derívese una expresión para el coeficiente cinético de fricción en términos de la frecuencia de vibración en ciclos por segundo.

Respuesta: $\mu = 0.867 f^2$

**PROBLEMA 2.18**
Dos deslizadoras están restringidas a moverse en el interior de un tubo liso que gira en un plano horizontal alrededor del eje fijo 0. Cada una de las deslizadoras está suspendida elásticamente de un resorte idéntico de módulo $k$. El extremo del resorte está fijo en 0 y la longitud no deformada del resorte es $r_0$. Determínese la frecuencia de vibración para una velocidad angular constante $\omega$.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2}$




**PROBLEMA 2.19**
Un pequeño cuerpo orbital se desplaza de su órbita circular una pequeña distancia $\delta$. Determínense el periodo y la ecuación de movimiento de la perturbación.
*Indicio:* La ley de Kepler establece que la línea radial desde un cuerpo orbital barre áreas iguales en tiempos iguales ($r^2\dot{\theta}$ = constante)

Respuesta: $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{gR^2}}$

## 2.4 VIBRACION TORSIONAL

La vibración torsional se refiere a la vibración de un cuerpo rígido alrededor de un eje de referencia específico. En este caso, el desplazamiento se mide en términos de una coordenada angular. El momento de restablecimiento se debe, ya sea a la torsión de un elemento elástico o al momento no equilibrado de una fuerza o de una pareja.

En la Fig. 2.3, del extremo de una barra larga se soporta un disco que tiene una masa relativamente grande con relación a la de la barra, y el otro extremo de la barra está fijo a una base rígida. Si la barra es elástica, cualquier desplazamiento angular del disco lejos de la posición de equilibrio, creará un momento de establecimiento de



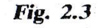
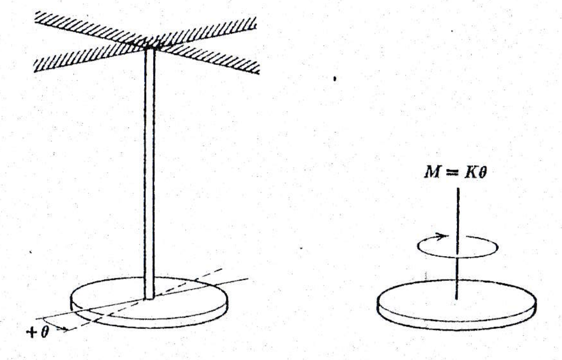




**Fig. 2.3**

$$M = \frac{JG\theta}{l} \tag{2.12}$$

en donde $J$ es el segundo momento de área (momento polar de inercia de área) alrededor del eje de la flecha, $G$ es el módulo de rigidez, $l$ es la longitud de la flecha, y $\theta$ es la medida de coordenada angular del disco con respecto al eje de la barra. Este momento de restablecimiento, es linealmente proporcional al ángulo $\theta$ y la constante de proporcionalidad es definida como la constante torsional del resorte.

$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{JG}{l} \tag{2.13}$$

El símbolo para la constante torsional del resorte es $K$, y las unidades para esta constante son par de torsión por unidad de desplazamiento, N·m/radián. Tomando la suma de momentos alrededor del eje de la barra, se puede enunciar la segunda ley de Newton para el movimiento, como

$$\sum \mathbf{M}_0 = I_0\ddot{\theta}$$

$$-K\theta = I_0\ddot{\theta}$$

El momento de restablecimiento es $K\theta$.
La ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{I_0}\theta = 0 \tag{2.14}$$

que es similar a la Ec. 2.2, y en donde $\theta$ está en lugar de la coordenada $x$,

y $K/I_0$ reemplaza a $k/m$. La frecuencia natural es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I_0}} \tag{2.15}$$

Este sistema de resorte torsional y masa, se conoce como *péndulo torsional.* La aplicación más significativa de un péndulo torsional se encuentra en un reloj mecánico. En un reloj, una rueda de trinquete y un trinquete, transmiten la oscilación regular de un pequeño péndulo torsional, a través de la carátula, a las manecillas del reloj. Este principio no ha cambiado desde que Huygens inventó el volante de reloj hace tres siglos.

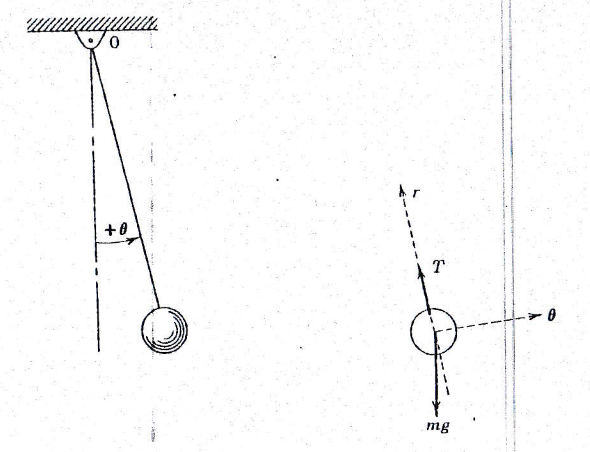
## 2.5 PENDULO SIMPLE

Otro ejemplo de vibración torsional es el péndulo simple clásico. Una pequeña masa o plomada $m$, se suspende verticalmente por medio de un alambre ligero, de una articulación en 0, como se ve en la Fig. 2.4. Cuando se desplaza la plomada de la vertical, ésta oscila alrededor de la articulación con movimiento periódico regular. Lo anterior constituye una observación muy conocida.

Si el movimiento se restringe a un plano único, la coordenada generalizada que describe el movimiento, es el desplazamiento angular a partir de la vertical, $\theta$, medido en ese plano. La longitud del alambre es una restricción que obliga a la plomada del péndulo a moverse según una trayectoria circular con respecto a la articulación. El reconocimiento de esta restricción hace a $\theta$ una coordenada generalizada.

El diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas activas sobre la plomada cuando se desplaza a ésta levemente de la posición de equilibrio. La fuerza de

**Fig. 2.4**






tensión en el alambre de soporte y el peso de la plomada, son las únicas fuerzas activas. Tomando la suma de fuerzas en la dirección de $\theta$,

$$\sum F_\theta = -mg \operatorname{sen}\theta = ma_\theta = ml\ddot{\theta}$$

La aceleración $a_\theta$ es positiva en la dirección de $\theta$ positiva.

Para pequeños ángulos de oscilación, se puede reemplazar el seno por el ángulo, con una precisión de 1% para hasta 5.5° de movimiento. Sustituyendo a $\theta$ por sen $\theta$

$$-mg\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.16}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, exactamente análoga a la Ec. 2.2, con $\theta$ en lugar de $x$, y $g/l$ en lugar de $k/m$. La frecuencia de las vibraciones pequeñas es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.17}$$

Esta sólo depende de la longitud del alambre que soporta al péndulo, y es independiente de la masa de la plomada.

El péndulo simple se ha usado como una medio de medir el tiempo. Los relojes de "abuelo" son un ejemplo bien conocido de un reloj de péndulo de gran precisión y confiabilidad.

## 2.6 PENDULO COMPUESTO

Un cuerpo rígido oscilará como péndulo, si se suspende de un punto diferente del de su centro de masa. Como ejemplo, considérese el cuerpo rígido de la Fig. 2.5, suspendido por el punto 0, y oscilando en el plano $x$-$y$. El centro de masa se encuentra en $G$.

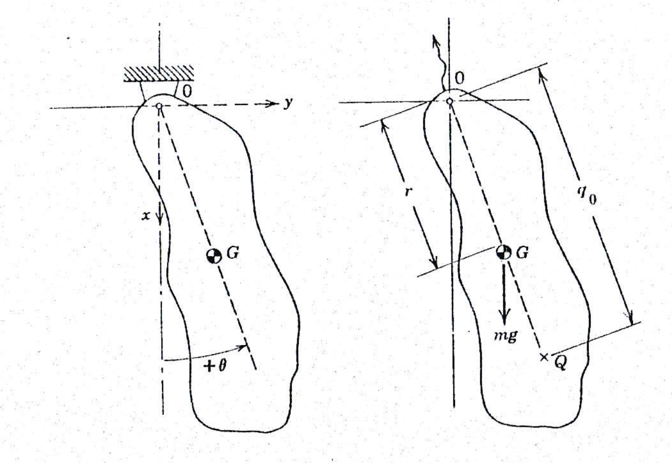
Tomando la suma de momentos alrededor del eje a través del punto 0 y normal al plano $x$-$y$,

$$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta} = -mgr \operatorname{sen}\theta$$

Para ángulos pequeños, reemplazando sen $\theta$ por $\theta$, el momento de restablecimiento es función del desplazamiento angular y

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{I_0}\theta = 0 \tag{2.18}$$

Fig. 2.5




Esta es también similar a la Ec. 2.2. La frecuencia natural es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgr}{I_0}} \tag{2.19}$$

$I_0$ es el momento de inercia de la masa del cuerpo rígido medido con respecto al eje $z$ que pasa a través de 0. Este es una medida de la resistencia del cuerpo a la aceleración angular. El momento de inercia de masa es un término dificultoso y excepto para ciertas formas elementales nunca se calcula directamente a partir de la geometría del cuerpo rígido. Se puede medir con bastante precisión a partir del efecto observado del momento de inercia sobre la respuesta dinámica de un cuerpo rígido a la aceleración angular, observando, por ejemplo, la frecuencia de oscilación del cuerpo rígido en la vibración libre.

En este punto, es conveniente hacer referencia a otras dos medidas arbitrarias del momento de masa de un cuerpo rígido. Si se concentrara toda la masa de un cuerpo rígido en un anillo delgado, que tuviera las mismas propiedades inerciales de resistencia a la aceleración angular que el cuerpo rígido, el radio de ese anillo sería el *radio de giro k*. Si toda la masa se concentrara en un punto, la distancia desde el eje fijo a ese punto, sería $q_0$. El punto en sí mismo se denomina el *centro de percusión*. La localización del centro de percusión y el radio de giro, se relacionan con la localización del centro de masa y el centro de rotación.

$$q_0 = \frac{k_0^2}{r} \tag{2.20}$$

Aquí, $r$ es otra vez la distancia radial desde el eje fijo al centro de masa.



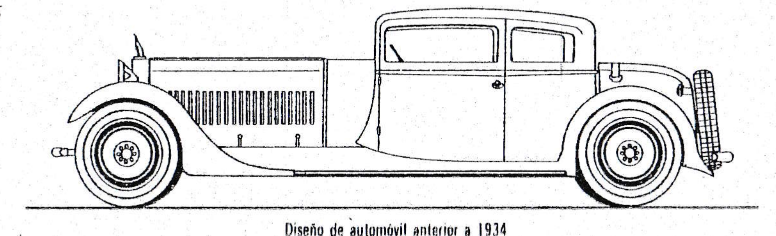
Si se reemplaza el momento de inercia de masa por su equivalente $I_0 = mg_0r$, la Ec. 2.19 se vuelve

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q_0}}$$

Esta es análoga a la frecuencia natural de un péndulo simple que tiene la misma longitud que la distancia desde el eje de oscilación al centro de percusión. Un cuerpo rígido suspendido de esta manera, se llama un *péndulo compuesto*. El término tiene un significado simple, porque el centro de percusión y el centro de oscilación se pueden intercambiar y en ambos casos resultará la misma frecuencia natural.

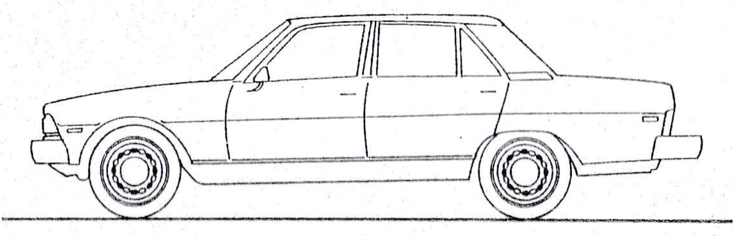
Un buen ejemplo de esto lo constituye un automóvil. Considerando el movimiento en un plano de perfil, el automóvil es un péndulo compuesto. Si las ruedas delanteras golpean una protuberancia, los pasajeros sentirán una reacción a menos que el centro de percusión se halle localizado en, o cerca del, eje posterior. Lo contrario es cierto si las ruedas traseras golpean la protuberancia. Se sentirá una reacción a menos que el centro de percusión se encuentre en, o cerca de, el eje frontal. Como consecuencia de lo anterior, un buen diseño de vehículo dispone el centro de percusión alrededor de uno de los ejes, y el centro de oscilación cerca del otro. La mayor parte de los fabricantes de automóviles cambiaron sus diseños en 1934, año en que este principio elemental de dinámica se usó por primera vez. Antes de 1934, la buena estética del automóvil centraba la tapa del radiador sobre las ruedas anteriores.

Fig. 2.6



Diseño de automóvil anterior a 1934

Fig. 2.7



Automóvil reciente

La dinámica actual para un automóvil en movimiento, es bastante complicada, ya que éste tiene varios grados de libertad, pero este ejemplo explica cómo se puede usar el principio del péndulo compuesto. La Fig. 2.6 muestra la diferencia entre los diseños de automóvil.

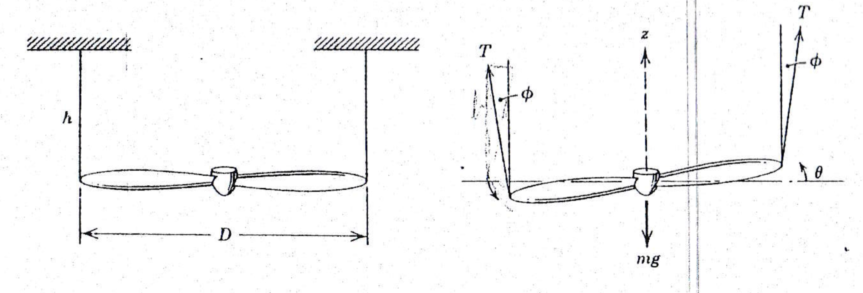
## 2.7 PENDULO FILAR

Un cuerpo rígido se puede suspender también como un péndulo filar soportándolo de manera que oscile en el plano horizontal. Existen péndulos bifilares, trifilares y cuadrifilares, dependiendo del número de hilos del soporte. Los momentos de inercia de masa se pueden encontrar a partir de suspensiones filares. Medir la frecuencia de un péndulo filar constituye un modo muy conveniente de encontrar el momento de inercia de masa y se utiliza extensamente en la práctica. Pocos estudiantes comprenden qué difícil es encontrar el momento de inercia de masa de un aeroplano de motor de chorro, o de un artefacto espacial por otros medios, o qué tan importante es esta cantidad para la güía y control de ese aeroplano o artefacto.

El ejemplo dado en el Prob. 2.20 muestra cómo se puede llevar esto a cabo.

### *PROBLEMA EJEMPLO 2.20. EL PENDULO BIFILAR*

Determínese el momento de Inercia $I_z$ de una hélice de aeroplano, a partir de las observaciones de la frecuencia natural de la oscilación libre de la hélice cuando ésta se suspende de dos alambres ligeros por los extremos de sus aspas. La longitud de los alambres de suspensión es $h$, y el desplazamiento de la hélice es $D$. El peso de esta hélice es $W$ y se conoce.




*Solución:*
Al moverse la hélice girando en el plano horizontal, se mueve ascendiendo y descendiendo una cantidad pequeña pero medible, en forma similar a la de



un péndulo simple. Los momentos de restablecimiento son, para un desplazamiento angular positivo,

$$-2T\,\text{sen}\,\phi\,\frac{D}{2}$$

La ecuación de movimiento con respecto al eje-$z$ geométrico

$$\sum \mathbf{M}_z = I_z\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$-TD\,\text{sen}\,\phi = I_z\ddot{\theta}$$

$I_z$ es el momento de inercia de masa con respecto al eje $z$.

Por geometría, $h$ sen $\phi$ = $(D/2)$ sen $\theta$, de donde

$$-\frac{TD^2}{2h}\,\text{sen}\,\theta = I_z\ddot{\theta}$$

Para ángulos de oscilación pequeños, se puede reemplazar sen $\theta$ por el ángulo $\theta$. Esta sustitución de la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{TD^2}{2I_z h}\,\theta = 0$$

Para ángulos de oscilación pequeños, $T$ es aproximadamente igual a $W/2$, y

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD^2}{4I_z h}\,\theta = 0$$

Usando nuestro conocimiento de esta ecuación de movimiento, la frecuencia natural es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgD^2}{4I_z h}}$$

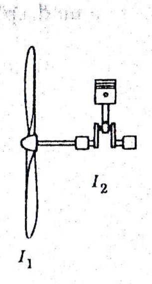
Resolviendo para el momento de inercia de masa

$$I_z = \frac{mgD^2}{16\pi^2 f_n^2 h}$$

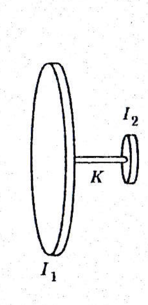
La suspensión bifilar se usa para determinar el momento de inercia de masa de muchos objetos que tienen simetría axial.

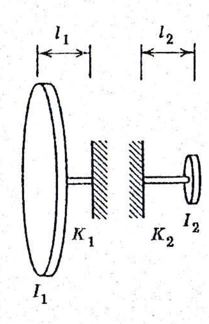
### *PROBLEMA EJEMPLO 2.21*

Un aeroplano ligero se impulsa por medio de un motor aeronáutico radial de nueve cilindros, que usa un ciclo de cuatro carreras. La potencia se transmite a través de una flecha corta, a una hélice de aluminio de dos aspas.




Sistema efectivo




Sistema equivalente

Determínese la frecuencia natural del sistema, si el momento axial de inercia de la hélice es 17.62 kg·m², y el momento efectivo de inercia de las partes móviles del motor radial es 0.544 kg·m². La constante de resorte torsional de la flecha de la hélice es 0.45 × 10⁶N·m/radián. ¿Cuál será el resultado esperado a una velocidad del motor de 2 000 rpm?

***Solución:***
Para el modo principal de vibración, la hélice y el motor se moverán una con respecto a otro, fuera de fase, pero con la misma frecuencia. La hélice se moverá en sentido dextrógiro en tanto que el motor girará en sentido levógiro y viceversa. Este movimiento se superpone sobre la rotación constante de la hélice y del motor. En cierto punto entre las dos masas, aparecerá un nodo estacionario, y el sistema se puede considerar como compuesto de dos péndulos torsionales simples colocados extremo por extremo. Para estos dos sistemas, las dos frecuencias $f_1$ y $f_2$ son iguales a la frecuencia natural $f_n$

$$f_n = f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1}{I_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_2}{I_2}}$$

Esto conduce a la afirmación de que las relaciones $K_1/I_1$ y $K_2/I_2$ son idénticas.

De la Ec. 2.13, la constante torsional del resorte es inversamente proporcional a la longitud de la flecha, e $I$, $J$ y $G$ son las mismas

$$K = \frac{JG}{l}$$

y

$$Kl = K_1 l_1 = K_2 l_2$$

combinando

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{l_2}{l_1}$$



Usando la longitud total de la flecha, $l = l_1 + l_2$

$$l = l_1\left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right)$$

Comenzando con la expresión para $f_1$ multiplicando ambos numeradores y denominadores por $l$, sustituyendo las ecuaciones anteriores para $l$, y sustituyendo $Kl = K_1 l_1$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{K\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)}$$

usando los valores dados de $I_1$, $I_2$ y $K$,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{0.45 \times 10^6\left(\frac{1}{17.62} + \frac{1}{0.544}\right)} = 147 \text{ ciclos/segundo}$$

$$= 8820 \text{ ciclos/minuto}$$

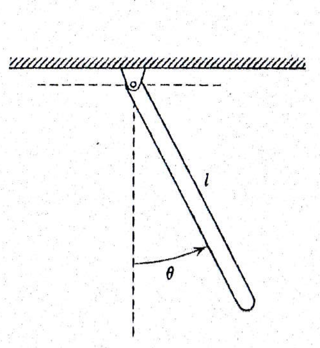
para un motor aeronáutico radial, de ciclo de cuatro carreras, con velocidad de 1 960 rpm, habrá

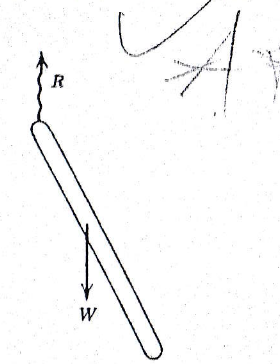
$$\tfrac{9}{2}(1\ 960) = 8\ 820 \text{ carreras de potencia/minuto}$$

Esto corresponde a la frecuencia natural del sistema, y resultará resonancia si el motor se hace girar a 1 960 rpm. A 2 000 rpm, se producirán violentas sacudidas en el aeroplano.

## *PROBLEMA EJEMPLO 2.22. EL PENDULO COMPUESTO*

Encuéntrese la frecuencia natural para una barra esbelta, larga, que está suspendida verticalmente por uno de sus extremos, y oscila en un plano, como péndulo. Localícese el centro de percusión y determínese el radio de giro.



*Solución:*
La barra esbelta gira alrededor del punto 0, debido al momento no equilibrado de la fuerza de su peso, $W$, con respecto al punto 0. La ecuación de movimiento para la rotación es

$$\sum \mathbf{M}_0 = I_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$-mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

El momento de inercia para una barra larga y esbelta, es $\frac{1}{3}ml^2$ alrededor de un extremo.

Reemplazando sen $\theta$ por $\theta$, lo que es válido para pequeñas oscilaciones, la ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta = 0$$

Esta es otra vez similar a la Ec. 2.2, con $\theta$ reemplazando a $x$, y $\frac{3}{2}g/l$ reemplazando a $k/m$.

La frecuencia circular natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

y la frecuencia natural medida en ciclos por segundo es

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

El radio de giro es

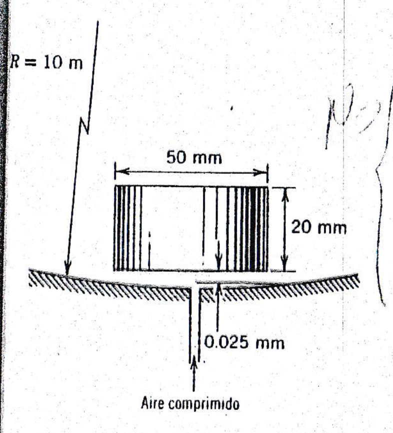
$$I_0 = mk_0^2 = \tfrac{1}{3}ml^2$$

$$k_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

y la distancia hasta el centro de percusión es

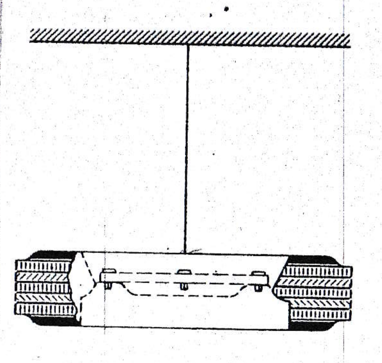
$$q_0 = \frac{k_0^2}{r} = \tfrac{2}{3}l$$



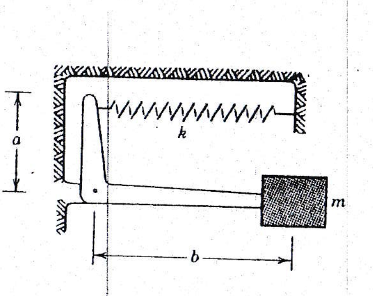



**PROBLEMA 2.23**
Un cilindro de acero de 50 mm de diámetro por 20 mm de altura ($\gamma$ = 7.48) "flota" sobre un casquete esférico cóncavo de 100 mm de diámetro gracias a que se está bombeando aire a través de un pequeño orificio central. El casquete tiene un radio de curvatura de 10 m. Si se desplaza al cilindro 10 mm lateralmente a partir de su posición central de reposo, ¿cuál será el periodo de oscilación? Supóngase que el claro en el borde del cilindro permanece constante, con valor de 0.025 mm.

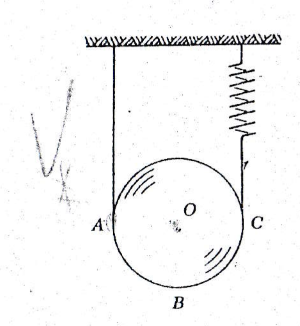
Respuesta: $\tau$ = 6.35 s



**PROBLEMA 2.24**
Un dispositivo proyectado para determinar el momento de inercia de un conjunto rueda-llanta, consiste de un alambre de suspensión de 2 mm por 2 m de longitud, y una placa de montaje a la cual se sujeta el conjunto. El alambre de suspensión está fijo en su extremo superior y cuelga verticalmente. Cuando el sistema oscila como péndulo de torsión, el periodo de oscilación, sin el conjunto rueda-llanta, es de 4 s. Con el conjunto montado sobre la placa, el periodo de oscilación es de 25 s. Determínese el momento de inercia del conjunto rueda-llanta.



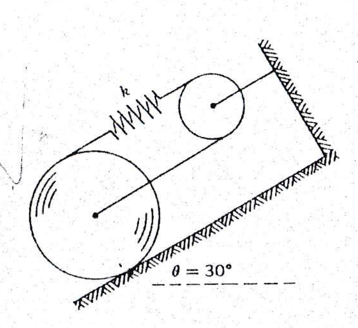

**PROBLEMA 2.25**
Determínese la frecuencia natural del péndulo horizontal mostrado. Despréciese la masa de la palanca.




**PROBLEMA 2.26**

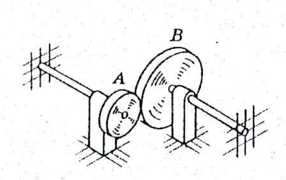
La rueda uniforme de masa $m$, está soportada en el plano vertical por medio de la banda ligera y flexible $ABC$, y el resorte, el cual tiene una rigidez $k$. La rueda tiene un momento de inercia $I_0$ con respecto al centro geométrico 0, y rueda sin deslizar sobre la banda $ABC$. Determínese la frecuencia natural del sistema.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4kr^2}{I_0 + mr^2}}$




**PROBLEMA 2.27**

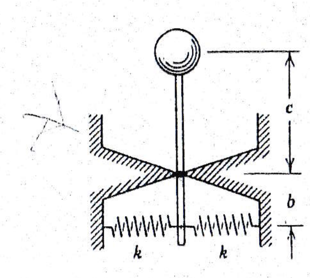
Un cilindro circular sólido se mantiene en sitio por medio de un cable y una polea. La flexibilidad del cable se puede representar por un resorte de módulo $k$. El cable está arrollado alrededor del cilindro. La fricción es suficiente para evitar el deslizamiento. Determínese la frecuencia natural para oscilaciones pequeñas. Se puede despreciar la masa de la polea.




**PROBLEMA 2.28**

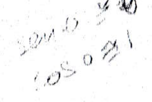
Los engranes $A$ y $B$ engranan con una relación de engranaje $n$. Están fijos en flechas circulares de longitudes y diámetros iguales. Las flechas están empotradas en ambos extremos. Determínese la frecuencia natural del sistema.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K(1+n^2)}{I_B + I_A n^2}}$




**PROBLEMA 2.29**

Una masa $m$ está fija al extremo de una barra sin peso que está pivoteada a una distancia $c$ a partir del peso. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración, para amplitudes de movimiento pequeñas? Este se denomina un péndulo vertical.



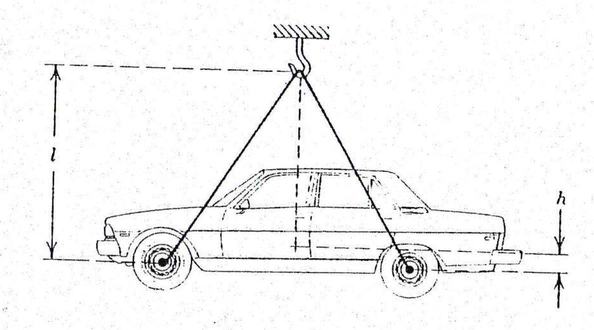
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2kb^2}{mc^2} - \dfrac{g}{c}}$

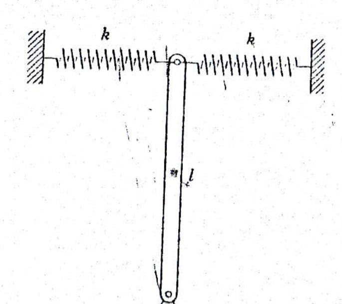


**PROBLEMA 2.30**

Se suspende como péndulo un automóvil de nuevo modelo, usando cables sujetos a los ejes frontal y posterior. Con $l$ = 4.6 m, el periodo de oscilación es de 4.3 s. Para $l$ = 2.6 m, el periodo disminuye a 2.3 s. Determínese la distancia a partir del plano que contiene el centro geométrico de los ejes, hasta el centro de gravedad.

Respuesta: 145 mm




**PROBLEMA 2.31**

Una barra uniforme, esbelta, de peso $W$, está pivotada en el extremo de fondo, y se sostiene en equilibrio por medio de dos resortes. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración, para pequeñas amplitudes?

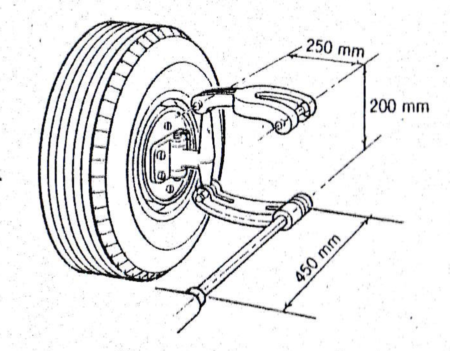
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{6kg}{W} - \dfrac{3g}{2l}}$

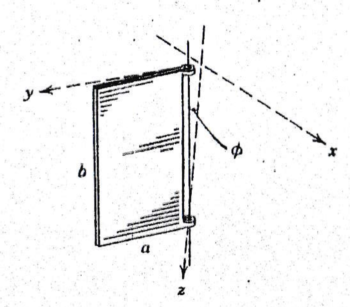


**PROBLEMA 2.32**

El extremo frontal de un automóvil de 1 000 kg, debe elevarse 100 mm antes de que las ruedas frontales se separen del piso. Si un conjunto de rueda frontal que incluye eje, freno, rueda y llanta, tiene una masa de 30 kg, determínese la frecuencia natural del conjunto, si se usa la suspensión de barra de torsión mostrada. Considérese que el peso del automóvil se puede distribuir uniformemente entre las cuatro ruedas.

Respuesta: $f_n$ = 4.55 Hz



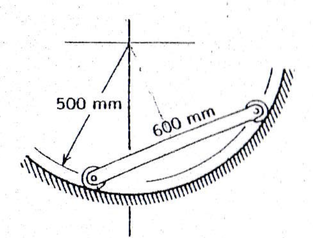

**PROBLEMA 2.33**

Determínese la frecuencia natural de oscilación libre, para una puerta rectangular sostenida de un eje de bisagra que está inclinado levemente en un ángulo $\phi$ con respecto a la vertical.

**PROBLEMA 2.34**

Una barra de 600 mm de longitud, gira sobre ruedas de peso despreciable, en una trayectoria circular de radio de 500 mm. Determínese la frecuencia de oscilación para la barra, si ésta se mueve en el plano vertical y se desplaza levemente a partir de su posición de equilibrio.

Respuesta: $f_n = 0.723$ Hz



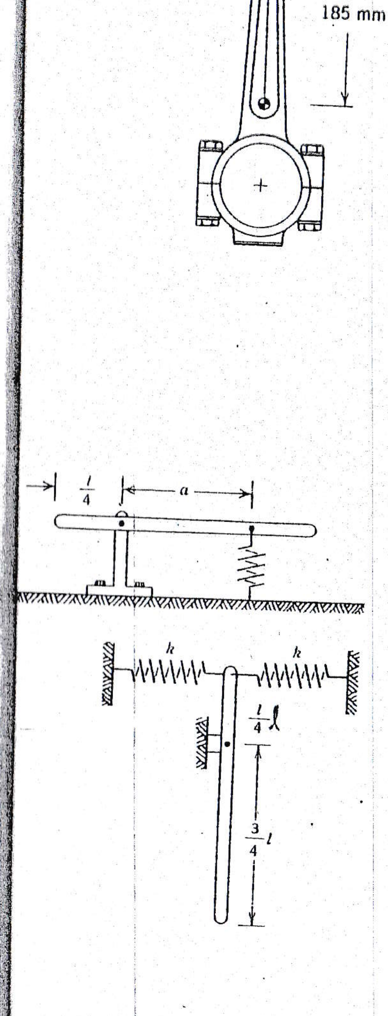



**PROBLEMA 2.35**

Determínese la frecuencia natural de un hemisferio sólido que oscila con movimiento plano sobre una superficie horizontal, si éste rueda sin deslizarse.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{15g}{26r}}$






**PROBLEMA 2.36**

Una biela tiene una masa de 3.10 kg. Oscila 59 veces en un minuto, cuando se suspende de un filo de cuchilla de la superficie superior del cojinete en el perno del émbolo. Determínese el momento de inercia respecto al centroide, que se encuentra localizado a 185 mm a partir de esta superficie.

Respuesta: $I_G = 0.0412$ kg·m²

**PROBLEMA 2.37**

Repítase el Prob. 2.22, usando el centro de percusión que se encuentra a un tercio de $l$ a partir del extremo de la barra, como centro de oscilación, y demuéstrese que no cambia la frecuencia natural. Este es el significado de un péndulo compuesto.

**PROBLEMA 2.38**

La barra esbelta uniforme de peso $W$, está soportada, en posición horizontal, por medio del resorte. Determínese la frecuencia para pequeñas oscilaciones, cuando esta barra se pone en movimiento.

**PROBLEMA 2.39**

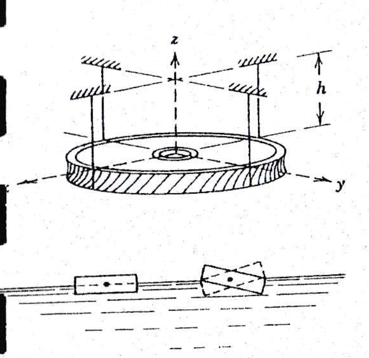
Una barra uniforme, esbelta, de masa $m$ y longitud $l$, cuelga *verticalmente* en un punto a la cuarta parte de su longitud, como se muestra. La parte superior de la barra está sujeta a dos resortes. Encuéntrese la frecuencia natural (en Hz) del sistema, suponiendo que las amplitudes de movimiento son pequeñas, si $k$ = 4 000, N/mm = 10 kg, y $l$ = 800 mm.

Respuesta: $f_n = 3.036$ Hz

**PROBLEMA 2.40**

Determínese la frecuencia natural, para pequeñas oscilaciones planas, de un casco hemisférico flotante. *Indicio:* El centro de masa se encuentra en $M$.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{6g}{5r}}$



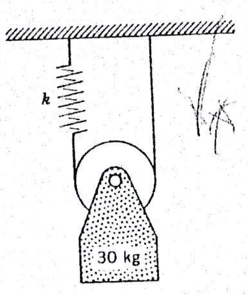

**PROBLEMA 2.41**

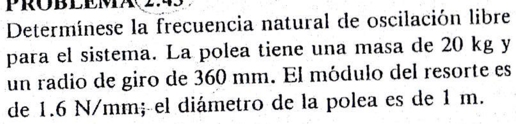
Un engrane helicoidal, tiene una masa de 3.61 kg. Este oscila 89 veces en un minuto cuando se le suspende como péndulo cuadrifilar. Determínese el momento polar de inercia del engrane con respecto a su centro; $h$ = 200 mm y el diámetro del engrane es de 142.9 mm.

**PROBLEMA 2.42**

Un bloque de madera de 20 mm por 240 mm flota, medio sumergido en agua. Determínese la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del bloque, cuando rueda de lado a lado. En este movimiento, el centro de masa permanece en el plano de la superficie del agua.

Respuesta: $f_n$ = 4.97 Hz



**PROBLEMA 2.43**

Determínese la frecuencia natural de oscilación libre para el sistema. La polea tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de 360 mm. El módulo del resorte es de 1.6 N/mm; el diámetro de la polea es de 1 m.

Respuesta: $f_n$ = 1.714 Hz



# TRES

# METODOS DE ENERGIA Y EL PRINCIPIO DE RAYLEIGH

## 3.1 METODOS DE ENERGÍA

Con frecuencia es muy simple y directo usar los métodos de energía para resolver problemas de vibración. Los métodos de energía implican un *balance de energía* que usa escalares, en lugar de un *balance de fuerza*, que usa vectores.

Para algunos, es más fácil concebir un balance de energía, que dibujar diagramas de cuerpo libre y establecer fuerzas vectoriales y un balance de fuerzas. Explicado con sencillez, en un balance de energía, se debe conservar la energía. Como principio, éste se conoce como el de la *Conservación de la energía.* Este constituye una ley física, y no se ha observado violación alguna a la misma. Para la energía total $E$,

$$E = T + V \tag{3.1}$$

En esta ecuación, $T$ denota la energía cinética debida a la velocidad de la masa del sistema, y $V$ es la energía potencial debida ya sea a la configuración de esta masa, medida a partir de cierta referencia arbitraria, o debida al esfuerzo de los elementos elásticos. La conservación de la energía se puede expresar en forma incremental como sigue, cuando $\Delta U$ es la energía que se añade a la energía total como calor, o se retira como trabajo por fricción

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V \tag{3.2}$$

Esta afirmación significa que la adición o disipación de energía debe aparecer también como un cambio en la energía cinética o potencial.

El principio de la conservación de la energía se mantiene para todos los sistemas, ya sea que se disipe o no energía, pero si no se añade o disipa energía, $\Delta U = 0$, y, si no hay cambio en la energía térmica del sistema a través del tiempo,

$$\frac{d}{dt}[T+V]=0 \tag{3.3}$$

Si $T$ y $V$ son funciones de una coordenada generalizada única, esta expresión conduce directamente a la ecuación de movimiento. La Ec. 3.3 se usa en forma exclusiva para este propósito y a este uso se hace referencia como del *método de energía,* para encontrar la ecuación del movimiento y las frecuencias naturales.

Para un sistema conservativo, la energía de cualquier masa o partícula específica, puede ser o potencial o cinética, pero la energía total del sistema debe permanecer constante. El movimiento cíclico es simplemente una manifestación de la conversión de energía potencial en energía cinética, y viceversa. Aun si se disipa parte de la energía, se pueden usar los métodos de energía para encontrar las ecuaciones de movimiento aproximadas. La palabra clave es "aproximadas", ya que la ventaja de usar el balance de energía con su simplicidad inherente, puede contrapesar la imprecisión debida al hecho de despreciar la disipación de energía.

## 3.2 GRADO UNICO DE LIBERTAD

Como un ejemplo, examinemos otra vez el sistema elástico simple del Cap. 2, Fig. 2.1, que se repite en la Fig. 3.1. En cualquier momento, la energía cinética del sistema se expresa como la energía cinética de la masa $m$, ignorándose la energía cinética del resorte

$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3.4}$$

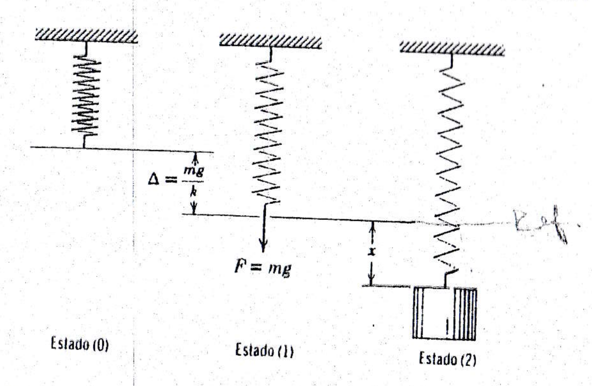
La energía potencial se expresa tanto como energía potencial elástica, como energía potencial de posición. Para que tengan significado, ambas deben expresarse como un cambio a partir de cierta posición de referencia, conveniente, aunque arbitraria. Para la Fig. 3.1, si la posición de referencia se hubiera tomado como la posición de equilibrio, en la que la fuerza elástica y el peso se hallan equilibrados, la energía elástica en el resorte sería $V_1 = \frac{1}{2}k\Delta^2$. El desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio, en la dirección $x$ positiva, aumentaría la energía elástica almacenada en el resorte, y disminuiría la energía potencial debida a la posición. El resultado sería

$$V_2=\tfrac{1}{2}k(x+\Delta)^2-mgx=\tfrac{1}{2}k\Delta^2+\tfrac{1}{2}kx^2 \tag{3.5}$$

El término $\frac{1}{2}k\Delta^2$ es un término constante para un peso dado.



**Fig. 3.1**




Sumando las energías cinética y potencial y diferenciando la energía con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}[T+V]=m\dot{x}\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)+kx\left(\frac{dx}{dt}\right)=0$$

o

$$m\ddot{x}(\dot{x})+kx(\dot{x})=0$$

Cancelando $x$, tenemos

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{3.6}$$

que es la Ec. 2.2. Nótese que si se hubiera tomado la posición deformada del resorte como la posición en la que $x = 0$, se habría tenido un término constante $mg/k$ en el lado derecho de la ecuación de movimiento.

## 3.3 METODO DE ENERGIA DE RAYLEIGH

Lord Rayleigh diseñó una forma alterna para el método de energía, para el cálculo aproximado de la frecuencia fundamental de un sistema vibratorio, cuyo método no deriva y resuelve las ecuaciones diferenciales de movimiento.

Suponiendo que el movimiento es armónico simple, premisa básica requerida por este método de solución,

$$x = X \operatorname{sen} \omega_n t$$

diferenciando con respecto al tiempo, la velocidad es

$$\dot{x} = X\omega_n \cos \omega_n t$$

Si la suma total de energías cinética y potencial es constante, entonces la energía potencial promedio, debe ser igual a la energía cinética promedio a través de un ciclo completo para el cual el periodo $\tau = 2\pi/\omega_n$

$$T_{prom} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2\, dt = \tfrac{1}{2} m \frac{X^2\omega_n^{\,2}}{\tau}\int_0^{\tau} \cos^2 \omega_n t\, dt = \tfrac{1}{4} m X^2 \omega_n^{\,2} \qquad (3.7a)$$

$$V_{prom} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \tfrac{1}{2} k x^2\, dt = \frac{1}{2}\frac{kX^2}{\tau}\int_0^{\tau} \operatorname{sen}^2 \omega_n t\, dt = \tfrac{1}{4} k X^2 \qquad (3.7b)$$

igualando

$$T_{prom} = V_{prom}$$

$$\tfrac{1}{4} m X^2 \omega_n^{\,2} = \tfrac{1}{4} k X^2 \qquad (3.8)$$

$$\omega_n^{\,2} = \frac{k}{m}$$

Este es el cuadrado de la frecuencia circular natural del sistema. Se puede lograr el mismo resultado, igualando la energía cinética máxima a la energía potencial máxima, evitándose así la necesidad de integrar a través de un ciclo completo. En la posición extrema, el sistema llega al reposo, y entonces toda la energía del mismo es potencial. Al pasar a través de la posición de equilibrio, la energía es totalmente cinética, siempre que se suponga que la energía potencial en la posición de equilibrio es cero. El principio de la conservación de la energía requiere que la energía total del sistema permanezca constante o que el cambio en energía cinética sea igual al cambio en energía potencial. Lo anterior significa que el cambio en energía potencial, en su máximo, debe ser igual al cambio en energía cinética en su máximo.

$$\Delta T_{máx} = \Delta V_{máx}$$

$$\tfrac{1}{2} m X^2 \omega_n^{\,2} = \tfrac{1}{2} k X^2 \qquad (3.9)$$

$$\omega_n^{\,2} = \frac{k}{m}$$

Nótese que la amplitud, $X$, se elimina de la expresión para $\omega_n^{\,2}$ para ambas Ecs. 3.8 y 3.9. Este no es un punto trivial, ya que la independencia de la frecuencia natural con respecto a la amplitud de movimiento, constituye la base del *Principio de Rayleigh*.

El encontrar la ecuación de movimiento usando métodos de energía, es en extremo útil cuando el sistema simple tiene un grado único de libertad, pero es geométrica o cinemáticamente complejo, por ejemplo, por tener numerosos elementos elásticos. La aceleración se puede relacionar directamente con las fuerzas activas a través del principio de la conservación de la energía, sin considerar fuerzas externas que no trabajan ni tienen efecto sobre los cambios de energía dentro del sistema.

El método de energía de Rayleigh, consta de tres partes importantes. La primera es la suposición de una *forma de modo,* que consiste en la relación entre coordenadas generalizadas. En el caso de una única coordenada generalizada, ésta es simplemente la expresión de las energías cinética y potencial en términos del desplazamiento máximo. El tema de la forma de modo se estudiará con mayor extensión en la Sección siguiente y en otras posteriores. La segunda parte consiste en la suposición de que el movimiento es armónico simple. Esta es una suposición válida para un sistema lineal no amortiguado. Si la amortiguación es leve, la distorsión es despreciable. La tercera parte consiste en la igualación de la energía cinética con la energía potencial, ignorando el calor, el trabajo y la fricción. Bajo estas consideraciones, es notable que se pueda encontrar con cierta precisión la frecuencia natural del movimiento armónico, pero el método de energía de Rayleigh es un método muy poderoso, y proporciona una muy buena aproximación de las frecuencias naturales, y es particularmente útil para un sistema con un grado único de libertad.



En un sistema con un grado único de libertad, sólo se involucra una coordenada, y se puede establecer la energía como función de esta coordenada única. Si se implican grados de libertad múltiples, se requerirá más de una coordenada, pero los métodos de energía proveen esquemas simples para organizar y ordenar una multiplicidad de términos. Se pueden usar efectivamente las matrices y el álgebra de matrices cuando los métodos de energía se extienden a problemas con varios gradós de libertad. Los métodos de energía simples aquí usados, son introductorios para los métodos lagrangianos usados en la mecánica avanzada.

## 3.4 LA SELECCION DE LA POSICION DE REFERENCIA

Es importante la selección de la posición de referencia (que aquí se denomina algunas veces simplemente la referencia). En la Sec. 3.2, para la Ec. 3.5, se seleccionó la posición de equilibrio como posición de referencia. En la Fig. 3.1, si se hubiera seleccionado la posición de referencia como la posición en la cual el resorte no estaba deformado,

$$V_0 = 0$$

Ahora, al deformarse el resorte a una nueva posición, una distancia $\Delta$, tal que $\Delta = mg/k$, la energía potencial dentro del resorte sería

$$V_1 = \tfrac{1}{2} k \Delta^2$$

estirando una distancia $x$

$$V_2 = \tfrac{1}{2} k (\Delta + x)^2 - mgx$$

y

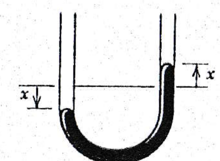
$$\Delta V = V_2 - V_1 = \tfrac{1}{2} k x^2$$

Así, el cambio de energía desde el estado 2 al estado 1, es simplemente $\frac{1}{2}kx^2$. Al seleccionar el estado de equilibrio como posición de referencia, el cambio

de energía potencial de las fuerzas de peso, se cancela convenientemente. Esto es verdad, a menos que las fuerzas de peso cambien de signo por el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio. Un cambio de signo se refiere al signo del vector de la coordenada generalizada. Un ejemplo de esta excepción sería el péndulo simple. Cualquier desplazamiento positivo o negativo a partir de la posición de equilibrio, produce un cambio positivo en la energía potencial.

## *PROBLEMA EJEMPLO 3.1. EL MANOMETRO*

Resuélvase el Prob. 2.2, usando el método de energía de Rayleigh.




***Solución:***
Otra vez, la posición de referencia más conveniente es la posición de equilibrio en la que la coordenada generalizada $x = 0$. En cualquier otra posición, el cambio de energía potencial a partir de la posición de equilibrio es

$$\Delta V = \frac{A\gamma x^2}{2} - \left(-\frac{A\gamma x^2}{2}\right) = A\gamma x^2$$

Una rama del líquido del manómetro asciende, y la otra desciende. La energía potencial de la rama elevada es $A\gamma x(x/2)$, ya que el centro de gravedad del segmento se desplaza $x/2$. La energía potencial de la rama descendida es $-A\gamma x(x/2)$, lo que hace que el cambio total de energía potencial a partir de la posición de equilibrio sea $A\gamma x^2$.

El cambio de energía cinética es

$$\Delta T = \frac{1}{2}\frac{A\gamma l}{g}(\dot{x}^2 - 0)$$

Suponiendo un movimiento armónico para la coordenada generalizada $x$, donde $X$ es el desplazamiento máximo

$$x = X \operatorname{sen} \omega_n t$$
$$\dot{x} = X\omega_n \cos \omega_n t$$

Haciendo que el cambio máximo de energía cinética sea igual al cambio máximo de energía potencial

$$\Delta T_{\text{máx}} = \Delta V_{\text{máx}}$$
$$\frac{1}{2}\frac{A\gamma l\omega_n^2}{g} X^2 = A\gamma X^2$$



de donde,

$$\omega_n^2 = \frac{2g}{l}$$

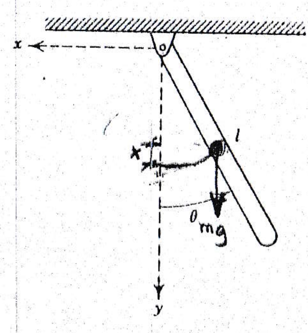
y

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Esta es exactamente la misma respuesta obtenida en el Prob. 2.2.

## *PROBLEMA EJEMPLO 3.2. EL PENDULO COMPUESTO*

Repítase el Prob. 2.22 resolviéndolo por el método de energía de Rayleigh.




***Solución:***
Se puede seleccionar la posición de referencia del péndulo como cualquier valor de la coordenada generalizada $\theta$. Es particularmente conveniente el ángulo $\theta = 0$, por que en éste se encuentra la posición de equilibrio del péndulo, la posición más baja del centro de gravedad, y todas las otras posiciones representan un aumento en energía potencial a partir de la posición de referencia. También la posición de equilibrio es la posición de energía cinética máxima.

En cualquier posión $\theta$, el cambio en energía potencial a partir del equilibrio

$$\Delta V = mg\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

El cambio en energía cinética del péndulo es

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}ml^2)[(\dot{\theta}^2) - 0]$$

Suponiendo movimiento armónico de la coordenada generalizada $\theta$, cuando $\Theta$ es el desplazamiento máximo,

$$\theta = \Theta \operatorname{sen} \omega_n t$$
$$\dot{\theta} = \Theta\omega_n \cos \omega_n t$$

Haciendo el cambio máximo de energía cinética igual al cambio máximo de energía potencial, que es la afirmación más conveniente de la ley de la conservación de la energía,

$$\Delta T_{máx} = \Delta V_{máx}$$

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3}ml^2(\Theta\omega_n)^2] = mg\frac{l}{2}(1-\cos\Theta)$$

Esta es una ecuación no lineal. Se puede linealizar usando dos términos de la serie de potencias para la función coseno

$$\cos\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \cdots$$

$$1-\cos\Theta = \frac{\Theta^2}{2!} - \frac{\Theta^4}{4!} + \cdots$$

Se ignoran todos los términos después del término $\theta^2/2$. Sustituyendo otra vez,

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3}ml^2(\Theta\omega_n)^2] = W\frac{l}{2}\frac{\Theta^2}{2}$$

de la que

$$\omega_n^2 = \frac{3g}{2l}$$

y

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

que es precisamente la misma solución obtenida en el Prob. 2.22.

Es interesante, además, notar que el error al sustituir sen $\Theta$ por $\Theta$ es menor de 1% si $\Theta < 5.5°$. La sustitución de $\Theta^2/2$ por $1-\cos\Theta$ es también válida, con un error menor de 1% para $\Theta < 22°$. La conclusión natural es que, después de todo, no es tan restrictiva la limitación a pequeños ángulos de oscilación.

**PROBLEMA 3.3**
Repítase el Prob. 2.25 usando el método de energía de Rayleigh.

**PROBLEMA 3.4**
¿Cuál es la frecuencia natural del aparato para prueba balística del Prob. 1.49?

**PROBLEMA 3.5**
Repítase el Prob. 2.29, usando el método de energía de Rayleigh.



**PROBLEMA 3.6**
Repítase el Prob. 2.31, usando el método de energía de Rayleigh.

**PROBLEMA 3.7**
Repítase el Prob. 2.35, usando el método de energía de Rayleigh.

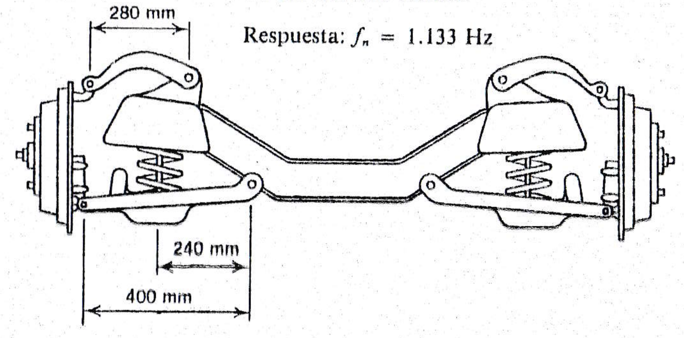
**PROBLEMA 3.8**
Repítase el Prob. 2.36 usando el método de energía de Rayleigh.

**PROBLEMA 3.9**
Repítase el Prob. 2.37, usando el método de energía de Rayleigh.

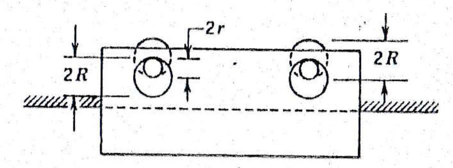
**PROBLEMA 3.10**
Repítase el Prob. 2.40, usando el método de energía de Rayleigh.

**PROBLEMA 3.11**
En el esquema adjunto se muestra la suspensión del extremo frontal de un automóvil. Si cada uno de los resortes helicoidales frontales tiene un módulo de 50 kN/m y el cuerpo tiene una masa de 1 420 kg, determínese la frecuencia natural de oscilación vertical del extremo frontal.

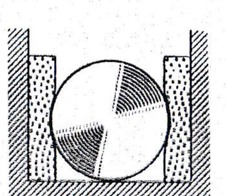
Respuesta: $f_n$ = 1.133 Hz




**PROBLEMA 3.12**
El péndulo de Chilton consiste de una masa $m$, que se soporta por dos rodillos sueltos, dispuestos en barre-



nos grandes. Considérese que la masa está soportada simétricamente, con el centro de masa en $G$. Si el radio de los rodillos es $r$, y el radio de los barrenos es $R$, siendo $R > r$, determínese la frecuencia natural del péndulo.



**PROBLEMA 3.13**

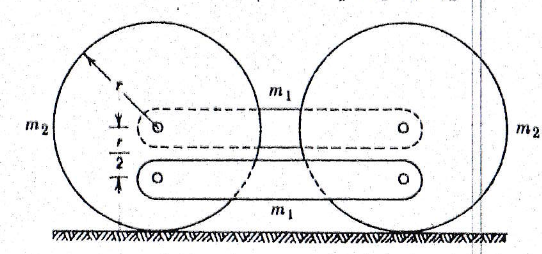
El cilindro sólido circular descansa entre dos cojines de hule esponja. Determínese la frecuencia natural de las oscilaciones horizontales, si el cilindro se desplaza de su posición de equilibrio y rueda sin deslizar sobre la superficie plana, sin perder contacto con los cojines.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4k}{3m}}$

**PROBLEMA 3.14**

Dos discos sólidos se encuentran conectados por dos barras sólidas laterales. Una barra lateral está empernada en los centros geométricos de los discos. La otra está empernada en puntos intermedios a partir de los centros geométricos. Determínese la frecuencia natural del sistema mecánico, para pequeñas oscilaciones con respecto a la posición de equilibrio estático. Ninguna de las conexiones empernadas tiene fricción. Los discos ruedan sin deslizar sobre la superficie horizontal.

Respuesta: $\omega_n^2 = \left[\dfrac{m_1}{6m_2 + \frac{5}{2}m_1}\right]\dfrac{g}{r}$

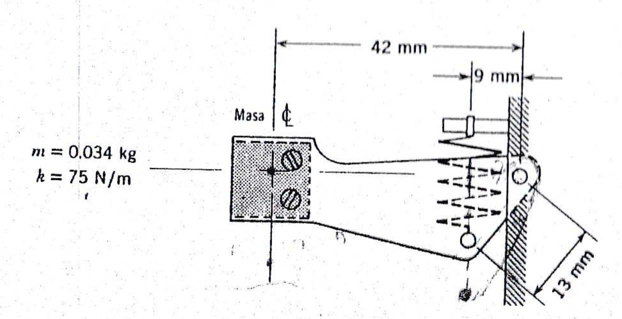



**PROBLEMA 3.15**

Un instrumento usado para contar las oscilaciones verticales de una línea de transmisión, consiste de un mecanismo de péndulo sísmico y escape. Determínese, para las dimensiones mostradas, la frecuencia natural del instrumento.

Respuesta: $f_n$ = 1.601 Hz

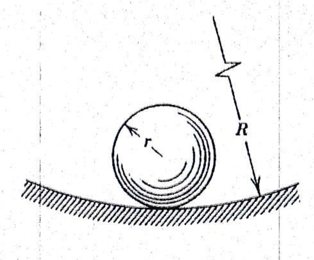





**PROBLEMA 3.16**

Determínese la frecuencia natural para oscilaciones pequeñas del péndulo vertical. Cada resorte tiene un módulo de $k$ y se encuentra bajo una tensión inicial $T$ cuando el peso se halla en equilibrio en la posición vertical.

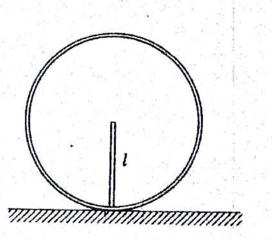
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2ka^2}{mb^2} - \dfrac{g}{b}}$




**PROBLEMA 3.17**

Derívese una expresión para la curvatura de una superficie esférica en términos de la frecuencia de oscilación de una esfera colocada sobre la misma y a la que se aleja de su posición de equilibrio.

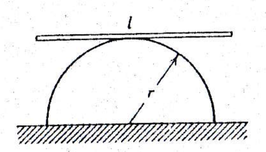
Respuesta: $R = r + \dfrac{5}{7}\dfrac{g}{(2\pi f_n)^2}$




**PROBLEMA 3.18**

Se asegura una barra uniforme de longitud $l$ y peso $w$ a un aro circular de radio $l$. El peso del aro es despreciable. Determínese la frecuencia natural para pequeñas oscilaciones, si la barra y el aro se retiran de su posición de equilibrio. La fricción es suficiente para evitar el deslizamiento.

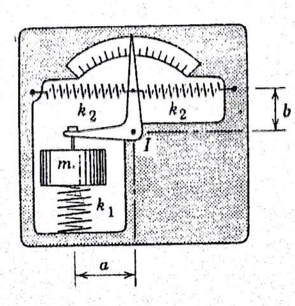
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$




**PROBLEMA 3.19**

El tablón plano se coloca céntricamente sobre la superficie hemisférica y se desplaza de su posición de equilibrio. Determínese la frecuencia natural, para pequeñas oscilaciones con respecto al centro de gravedad.

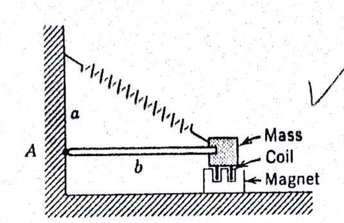
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{12gr}{l^2}}$




**PROBLEMA 3.20**

Un medidor de amplitud consiste de una masa sísmica suspendida como se muestra. Determínese la frecuencia natural del medidor en términos del resorte de tensión $k_1$, el resorte de compresión $k_2$, la masa $m$ y el momento de inercia $I$.

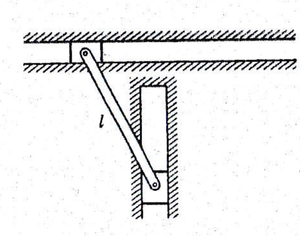
Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k_2b^2 + k_1a^2}{I + ma^2}}$




**PROBLEMA 3.21**

Un sismómetro vertical consiste de una masa pendular grande dispuesta en el extremo de un aguilón horizontal sin masa. La masa y el botalón están articulados en el extremo $A$ y suspendidos por medio de un resorte de constante $k$. Determínese la frecuencia natural del sismómetro.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{a^2}{(a^2+b^2)}\left[\dfrac{k}{m} - \dfrac{g}{a}\right]}$

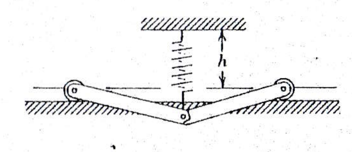



**PROBLEMA 3.22**

Dos masas idénticas se encuentran conectadas por pernos a un eslabón rígido de longitud $l$. Una de ellas es libre de moverse en una ranura vertical y la otra es libre de moverse en una ranura horizontal. No existe fricción en las ranuras. Determínese la frecuencia natural de oscilación para pequeñas oscilaciones.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$






**PROBLEMA 3.23**

La longitud no deformada del resorte es $h$, y el módulo es $k$. Cada una de las barras uniformes idénticas, tiene una masa $m$. Determínese la frecuencia natural del sistema.



**PROBLEMA 3.24**

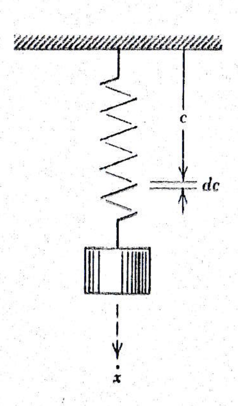


Determínese la frecuencia natural para pequeñas oscilaciones del marco de cuatro barras mostrado, si éste se desplaza de la posición de equilibrio indicada. Cada uno de los tres eslabones consiste de una barra uniforme que pesa 4.54 kg.

Respuesta: $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{kg}{W} - \dfrac{2g}{a}\right)}$

## 3.5 FORMA DE MODO Y EL EFECTO DE LA MASA DEL ELEMENTO ELASTICO

Al usar los métodos de energía, se puede corregir el cálculo para la frecuencia natural, con objeto de incluir la masa del elemento elástico, si esta masa no es despreciable. Sólo es necesario sumar al energía cinética del elemento elástico, lo que se puede hacer con facilidad, siempre que se conozca el modo de vibración.




Como ejemplo, en la Fig. 3.1, si se selecciona la posición de equilibrio como posición de referencia, el cambio de energía potencial es simplemente

$$V_2 - V_1 = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (3.10)$$

La inclusión del efecto de la masa del resorte no cambia la energía potencial.

La energía cinética del sistema incluye la energía cinética de la masa y la energía cinética del resorte. La energía cinética de la masa $m$, es

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2$$

La energía cinética de un elemento de resorte, $dc$, varía con la distancia a partir del extremo fijo del mismo. El peso por unidad de longitud es $\mu$.

$$dT_s = \frac{1}{2}\frac{\mu dc}{g}\dot{c}^2$$

Si suponemos una relación lineal entre la velocidad $c$ y la velocidad del extremo del resorte $\dot{x}$, podemos integrar para encontrar la energía cinética total del resorte

$$\dot{c} = \frac{c}{l}\dot{x}$$

$$\dot{c} = \chi \dot{x}$$

la fracción $c/l = \chi$ es el *modo, forma de modo,* o *fracción modal.* Este describe el desplazamiento de cualquier punto sobre el resorte. Se simboliza como $\chi$, y en este caso es una relación lineal entre $c$ y $l$. Podría haber sido casi cualquier cosa, pero ésta es la forma lógica.

En este punto son pertinentes algunas observaciones sobre la función $\chi$. Esta es una función $\chi(c)$, y no del tiempo, pudiéndose expresar las derivadas con respecto al tiempo $\dot{c}$ y $\ddot{c}$ como

$$\dot{c} = \chi \dot{x}$$

$$\ddot{c} = \chi \ddot{x}$$

lo que hace bastante importante a la relación $\chi$.

Sustituyendo para $\dot{c}$, la energía cinética del elemento $dc$ es

$$dT_s = \frac{1}{2}\frac{\mu}{g}\frac{c^2}{l^2}\dot{x}^2\, dc$$

Integrando a través de todo el resorte,

$$T_s = \int_0^l dT_s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\mu l}{g}\dot{x}^2$$

ya que el peso del resorte es $\mu l$, la inclusión del efecto de la masa del resorte es cinéticamente equivalente a añadir un tercio de la masa de éste a la masa principal, $m$.

$$T = \tfrac{1}{2}[m + \tfrac{1}{3} m_s]\dot{x}^2 \qquad (3.11)$$



Supongamos ahora que se puede expresar la oscilación del sistema como un movimiento armónico simple de la coordenada generalizada $x$, el desplazamiento de la masa principal al extremo del resorte

$$x = X \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$\dot{x} = X\omega_n \cos \omega_n t$$

igualando la energía cinética máxima a la energía potencial máxima

$$\Delta T_{máx} = \Delta V_{máx}$$

$$\tfrac{1}{2}[m + \tfrac{1}{3} m_s] X^2 \omega_n^2 = \tfrac{1}{2} k X^2 \qquad (3.12)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m + \frac{1}{3} m_s}$$

Es obvio que la fracción ⅓ es consistente con nuestra suposición principal de una relación lineal entre $\dot{c}$ y $\dot{x}$. Si hubiéramos seleccionado otra relación física para la forma de modo, tal como una parábola,

$$\dot{c} = \frac{c^2}{l^2}\dot{x}$$

ésta también hubiera satisfecho nuestro conocimiento de las condiciones de límite, pero el resultado habría sido la adición de ⅕$m$, en lugar de ⅓$m_s$.

## 3.6 PARAMETROS DISTRIBUIDOS

El método de energía de Rayleigh se puede usar también para determinar la frecuencia fundamental de sistemas con parámetros distribuidos, siendo para esto el mejor ejemplo práctico, el de vigas uniformes.

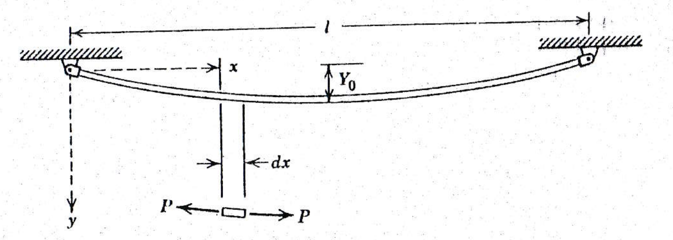
Como ejemplo de un sistema semejante, considérese una barra vibratoria tensa entre soportes, con una carga de tensión $P$. Este es un sistema continuo y existe un número infinito de frecuencias naturales. Haciendo referencia a la Fig. 3.2, para el modo fundamental de vibración se puede expresar el desplazamiento lateral de la barra $y(x, t)$ en términos de la forma de modo $\chi(x)$, que es puramente una función de $x$ y $Y(t)$ que es puramente una función del tiempo.

$$y(x, t) = \chi(x) Y(t) \qquad (13.13)$$

Para la barra, la primera forma de modo $\chi(x)$ es la senoide sen $\pi x/l$. Como función, ésta satisface todas las restricciones del sistema, incluyendo las condiciones de límite especificadas. La función $\chi(x)$ no es una función de

$$\chi(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$$

**Fig. 3.2**




El desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cualquier punto en la barra, varían de acuerdo con esta forma de modo. $Y_0$ es el desplazamiento en la mitad del claro. $Y(t)$ define la historia cronológica de cada punto. Así, si suponemos adicionalmente que el desplazamiento en cualquier punto es armónico simple,

$$y = \chi(x)\, Y_0 \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$y = \chi(x)\, Y_0 \omega_n \cos \omega_n t$$

En este punto está bien un comentario acerca de las coordenadas principales. El conocimiento de desplazamiento máximo $Y_0$ al centro del claro, y del modo de forma sen $\pi x/l$, define el desplazamiento en cualquier posición $x$. Así, la combinación $\chi(x) Y_0$ es, por nuestra definición, una coordenada principal.

Usando estas expresiones, se puede determinar la energía cinética de la barra en una forma muy parecida a la de la energía cinética del resorte elástico simple. Si el peso por unidad de longitud es $\mu$, la energía cinética de un elemento de longitud $dx$ es

$$dT = \frac{1}{2}\frac{\mu}{g}\dot{y}^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu}{g} Y_0^2 \omega_n^2 \cos^2 \omega_n t \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{l}\, dx$$

y, para toda la barra, se puede encontrar la energía cinética integrando desde 0 a $l$.

$$T = \frac{1}{2}\frac{\mu}{g} Y_0^2 \omega_n^2 \cos^2 \omega_n t \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{4}\frac{\mu}{g} l Y_0^2 \omega_n^2 \cos^2 \omega_n t$$

La energía potencial almacenada en un elemento de barra de longitud $dl$, sería

$$dV = P\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx - P\, dx$$

usando los primeros dos términos de la expresión binominal para el radical,

$$dV = \frac{P}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$



Para toda la barra.

$$V = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{P}{2}\frac{\pi^2}{l} Y_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n t \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{P}{4}\frac{\pi^2}{l} Y_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n t \qquad (3.15)$$

Estableciendo que el cambio máximo de energía potencial es igual al cambio máximo de energía cinética,

$$\Delta T_{\text{máx}} = \Delta V_{\text{máx}}$$

$$\frac{1}{4}\frac{\mu l}{g} Y_0^2 \omega_n^2 = \frac{P}{4}\frac{\pi^2}{l} Y_0^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^2 P}{\mu l^2} \qquad (3.16)$$

El método de energía de Rayleigh es útil cuando se sabe que el sistema vibratorio es lineal y se desea una expresión para la frecuencia natural fundamental. Esto requiere una forma de modo, si va a incluirse el efecto cinético de la masa distribuida y si la forma de modo está en error, el cálculo de la frecuencia natural estará en error. Deberá notarse otra vez que la frecuencia natural es independiente de la amplitud.

## 3.7 SISTEMAS REUNIDOS

En las últimas dos secciones surgió el problema práctico de modelar el mundo real, y esto es difícil de evitar. Toda la elasticidad se reúne en un resorte, con un contenido elástico, $k$. Todas las propiedades inerciales se reúnen en una masa $m$. ¿Cómo se logra este modelado? ¿Cuándo deberán distribuirse toda la elasticidad y toda la masa, y no reunirse? ¿Qué valores numéricos pueden darse a los valores modelados? Por supuesto, la respuesta constituye en gran parte el arte de la ingeniería, y en realidad éste sólo puede ser enseñado por el ejemplo. Algunos problemas sugieren cómo se pueden reunir los sistemas. Hemos visto un ejemplo. Un resorte lineal fijo en un extremo, y soportando una masa en el otro, se puede modelar reuniendo un tercio de la masa del resorte con la masa soportada. Para una viga en voladizo, esta fracción es 33/140. El efecto inercial de la masa de una viga simplemente apoyada se puede modelar colocando 17/35 de la masa de la viga en su centro geométrico. Para una viga uniforme, empotrada en sus extremos, esta fracción es 3/8. Estas fracciones se pueden calcular para una viga o resorte ideales, pero para las vigas o resortes reales, dichas fracciones son sólo aproximadas.

En cada caso de modelado se hacen iguales las características cinéticas del modelo a las del sistema original. Como otro ejemplo de equivalencia cinética, consideremos la biela del Prob. 2.36. Esta biela va a modelarse como un sis-

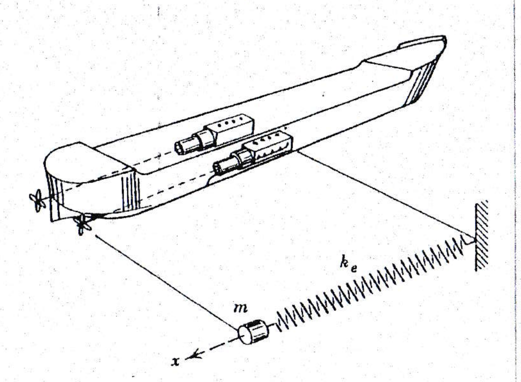
tema de dos masas, una de las masas en el muñón de cigüeñal, y la otra masa en el perno del émbolo. La masa total y la geometría deben permanecer sin cambio. Las características inerciales de la biela y la localización del centro de masa, deben permanecer inalterados. Esto conduce a cuatro ecuaciones.

$$l = r_A + r_B$$
$$m = m_A + m_B$$
$$m_A r_A = m_B r_B$$
$$m_A r_A^2 + m_B r_B^2 = m k_G^2$$

En la última ecuación, $k$ es el radio de giro con respecto al centro de masa. Estas cuatro afirmaciones no son por lo general compatibles. Esto es, si se tiene la localización del centro de masa y la masa total, estas dos afirmaciones determinarán únicamente $r_A$, $r_B$, $m_A$ y $m_B$. Seguirá la cuarta, que es el momento de inercia, pero probablemente no sea el momento de inercia conocido de la biela. Por otro lado, podemos aceptar las cuatro ecuaciones y tratar de establecer un compromiso. En los hechos reales, sólo es necesario establecer un compromiso pequeño. La biela modelo es un poco más corta, pero el centro de masa y las propiedades inerciales permanecen en realidad sin cambiar.

### PROBLEMA EJEMPLO 3.25

Un gran transatlántico de lujo tenía un problema de vibración que hacía crítica la operación del mismo, hasta que fue corregida. Este barco tenía cuatro hélices, cada una con una masa de 12 200 kg e impulsada por una flecha hueca larga de 0.56 m D.E. y 0.28 m D.I. y 71.6 m de longitud. Navegaba a una velocidad correspondiente a 258 rpm. Determínese la frecuencia natural de vibración longitudinal de la hélice y la flecha. ¿Qué pasaría si el barco se encontrara equipado (como lo estaba) con hélices de cuatro aspas? ¿Cómo se corregiría el problema?






***Solución:***

Para una carga axial $P$, la deformación longitudinal de la flecha de la hélice, será

$$\delta = \frac{Pl}{AE}$$

La constante de resorte efectiva $k_e$, es

$$k_e = \frac{P}{\delta} = \frac{AE}{l} = \frac{\pi}{4}\frac{(0.56^2 - 0.28^2)}{71.6}(205 \times 10^9) = 528.9 \times 10^6 \text{ N/m}$$

La masa de la flecha de la hélice, es 99 200 kg

$$mg = \frac{\pi}{4}(0.56^2 - 0.28^2)(71.6)(7.5) = 99\,200 \text{ kg}$$

Calcular la frecuencia natural sin considerar la masa del elemento elástico, la flecha de la hélice, sería un grave error, ya que su masa efectiva es de un orden de magnitud mayor que el de la masa de la hélice. Usando la Ec. 3.12,

$$\omega_n^2 = \frac{k_e}{m + (m/3)}$$

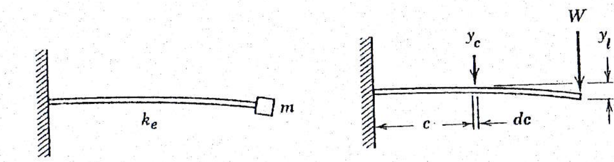
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{528.9 \times 10^6}{12\,200 + (99\,200/3)}} = 17.2 \text{ Hz} = 1032 \text{ cpm}$$

A una velocidad de crucero correspondiente a 258 rpm de la flecha de la hélice, una de las cuatro aspas de ésta pasará por el área restringida entre la hélice y el casco cada 15 s, 4 veces cada revolución o 1 032 veces cada minuto, haciendo juego con la frecuencia natural.

Para eliminar la vibración indeseada, se usaron hélices de tres aspas. Existe una crónica de este problema en el diario de la Sociedad de Arquitectos Navales e Ingenieros Marinos de E.U.A.

### PROBLEMA EJEMPLO 3.26

Una viga uniforme en voladizo, soporta una masa $m$ en el extremo no empotrado, estando fijo el empotrado en una pared vertical. Determínese el efecto cinético, sobre la frecuencia natural, de considerar la masa de la viga.




*Solución:*
La deflexión estática $y_c$ en cualquier punto a lo largo de la viga, es

$$y_c = \frac{mg}{EI}\left(\frac{lc^2}{2} - \frac{c^3}{6}\right)$$

en donde $I$ es en este caso el segundo momento de área de la sección transversal de la viga, y la deflexión $y_l$ del extremo de esa viga bajo la carga estática $mg$ es

$$y_l = \frac{mgl^3}{3EI}$$

La forma de modo exacta para la deflexión dinámica de una viga en vibración, implica funciones hiperbólicas, pero supongamos, para el modo fundamental, que las formas de modo estática y dinámica son idénticas

$$\chi(c) = \frac{y_c}{y_l} = \frac{1}{2l^3}(3lc^2 - c^3)$$

Se puede encontrar la velocidad de cualquier elemento de viga en términos de la velocidad en el extremo de la misma, y de la forma de modo

$$y_c = \chi y_l$$
$$\dot{y}_c = \chi \dot{y}_l$$

El cambio en energía cinética del sistema, incluyendo tanto la energía cinética de la viga, como la energía cinética de la masa concentrada en el extremo de la viga, es

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} m \dot{y}_l^2 + \int_0^l \frac{\mu\, dc}{2g} \dot{y}_c^2$$

La masa de la viga uniforme es $m_s$ y $m_s g = \mu l$. $\mu$ es el peso de la viga por unidad de longitud. La masa al extremo de la viga es $m$. Sustituyendo para la velocidad $y_c$,

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} m \dot{y}_l^2 + \int_0^l \frac{\mu \dot{y}_l^2}{8l^6 g}(3l^2c - c^3)^2\, dc$$

Integrando,

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} m \dot{y}_l^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{33}{140} m_s \dot{y}_l^2$$



Incluir el efecto de la viga en vibración es cinemáticamente equivalente a añadir $^{33}/_{140}$ de la masa de la viga a la masa $M$.

La constante de resorte equivalente para una viga en voladizo, es $k_e = 3EI/l^3$ en términos de la deflexión en el extremo de la misma. El cambio de energía potencial en términos de la deflexión al extremo de la viga, es

$$\Delta V = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3} y_l^2$$

Suponiendo movimiento armónico simple para la viga,

$$y_l = Y_l \operatorname{sen} \omega_n t$$

En donde $Y_l$ es la deflexión máxima en el extremo de la viga.

Haciendo que el cambio máximo de energía cinética sea igual al cambio máximo de energía potencial,

$$\Delta T_{\text{máx}} = \Delta V_{\text{máx}}$$

$$\tfrac{1}{2} m Y_l^2 \omega_n^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{33}{140} m_s Y_l^2 \omega_n^2 = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3} Y_l^2$$

y

$$\omega_n^2 = \frac{3EI}{(m + \frac{33}{140} m_s) l^3}$$

Por motivos de comparación, consideremos lo que sucede cuando $m \to 0$, lo que es simplemente la frecuencia fundamental de una viga uniforme en voladizo.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{\frac{33}{140} m_s l^3}} = 3.567\sqrt{\frac{EIg}{\mu l^4}}$$

El valor exacto es $\omega_n = 3.515\sqrt{EIg/\mu l^4}$, o cerca de 1½% de error. Nótese también que la forma de modo aproximada da una frecuencia natural que es más alta que la real. Esta es una tendencia característica, a la cual haremos referencia después.

**PROBLEMA 3.27**
Determínese como en el Prob. Ej. 3.26, la frecuencia natural más baja de una viga en voladizo, usando la forma de modo

$$\chi(c) = 1 - \cos\frac{\pi c}{2l}$$

que también satisface las condiciones de límite para una viga en voladizo.

Respuesta: $\omega_n = 3.64\sqrt{\frac{EIg}{\mu l^4}}$

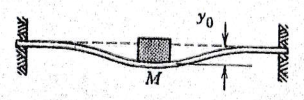
**PROBLEMA 3.28**
Determínese la frecuencia natural más baja de una viga simplemente apoyada, de sección transversal uniforme, con una masa central $M$. Supóngase una curva de la forma

$$y = \frac{Mg}{48EI}(3xl^2 - 4x^3)$$

que es válida para $0 \leq x \leq l/2$.

**PROBLEMA 3.29**
Resuélvase el problema anterior usando la forma de modo

$$\chi = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$$




**PROBLEMA 3.30**
Determínese la frecuencia natural más baja de una viga con extremos empotrados, de sección transversal uniforme, con una masa central $M$. Supóngase una curva de la forma,

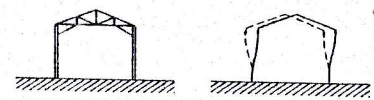
$$y = \frac{Mg}{48EI}(3lx^2 - 4x^3)$$

la que es válida para $0 \leqslant x \leqslant l/2$.

Respuesta: $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{192EI/l^3}{M + \frac{13}{35}m_s}}$

**PROBLEMA 3.31**
Resuélvase el problema anterior, usando la forma de modo

$$\chi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$



**PROBLEMA 3.32**
Una construcción de marcos, vibra lateralmente según se muestra. Determínese, usando el método de energía de Rayleigh, la fracción de las paredes que se puede considerar se mueve cinéticamente con la armadura de techo. *Indicio:* Considérese a las paredes como fijas a la cimentación y a la estructura de techo.

Respuesta: 0.375



**PROBLEMA 3.33**
Un buque vibra en el mar de varios modos. Uno de estos modos es lateral, como una viga libre-libre. Determínese, usando el método de energía de Rayleigh, la frecuencia fundamental de vibración lateral para una viga libre-libre, con una rigidez contra flexión de $EI$ y de peso uniforme de $\mu$ por unidad de longitud. La deformación lateral se puede describir por la ecuación

$$y = b\left(3\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - 2\right)$$

en la que $b$ es la deflexión lateral máxima a mitad del barco. *Indicio:* La energía de deformación de una viga uniforme, en deformación, es

$$V = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

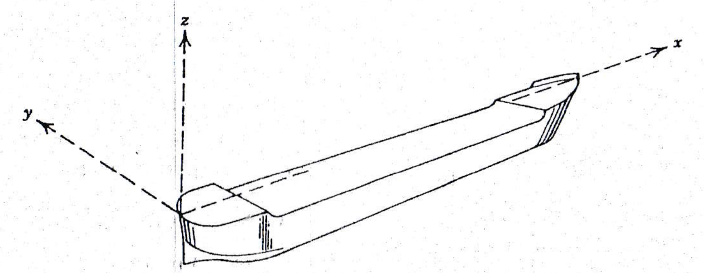
Respuesta: $f = \frac{11.3}{\pi}\sqrt{\frac{EIg}{\mu l^4}}$

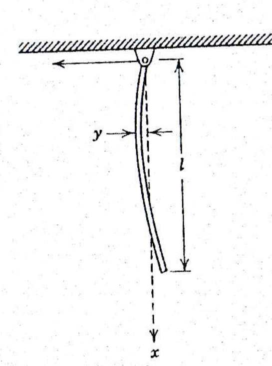
**PROBLEMA 3.34**
Una barra larga que está pivotada en su extremo superior, cuelga verticalmente. Para determinar su frecuencia natural de vibración lateral, se necesita una forma de modo. La ecuación

$$y = \sqrt{2}b\operatorname{sen}\frac{5}{4}\frac{\pi x}{l}$$

satisface las condiciones de límite. Determínese la energía cinética, la energía potencial y la frecuencia natural de la barra para el modo, usando esta forma de modo. Recuérdese que para una barra uniforme

$$V = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$






**PROBLEMA 3.35**
Determínese la frecuencia natural para la barra del Prob. 3.34, usando la forma de modo

$$y = b\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - \frac{x}{l}\right)$$

## 3.8 PRINCIPIO DE RAYLEIGH

Se puede extender el método de energía de Rayleigh para encontrar la frecuencia natural fundamental o más baja de un sistema vibratorio que tenga más de un grado de libertad. Esta extensión se puede usar también para encontrar las frecuencias naturales, pero se postergará el uso de este concepto hasta que se pueda hacer un estudio más detallado de los grados de libertad múltiples.

Como un ejemplo considérese un sistema de dos masas, tal como el de la Fig. 3.3. Si el movimiento de $m_1$ es $x_1$ y el movimiento de $m_2$ es $x_2$, se pueden escribir directamente los cambios en energías cinética y potencial.

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 = \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2 \qquad (3.17)$$
$$\Delta V = \tfrac{1}{2}kx_1{}^2 + \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

Las coordenadas $x_1$ y $x_2$ son coordenadas generalizadas, pero no son coordenadas principales. Esto es, es imposible describir un modo de movimiento en una u otra de las coordenadas, separadamente. Lo anterior quiere decir que la relación entre $x_1$ y $x_2$ es significante en la descripción del movimiento. Esto constituye también un significado de la forma de modo.

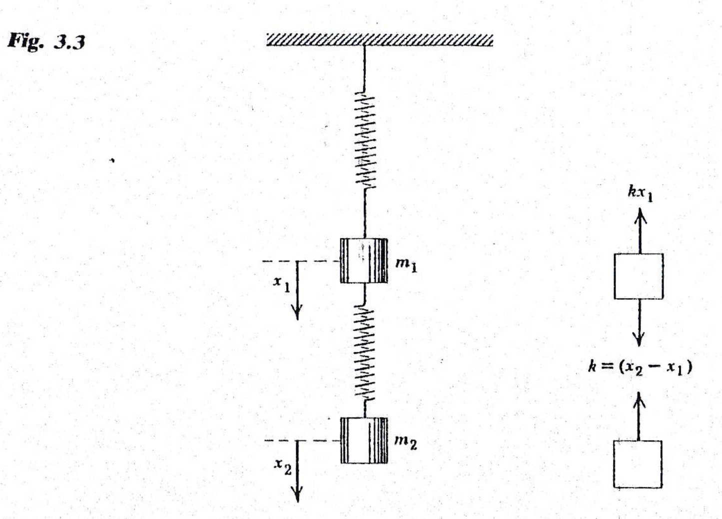
Para un sistema de dos grados de libertad, existen dos frecuencias naturales. Esto se estudiará en detalle posteriormente, pero en cualquiera de las dos frecuencias, tanto $x_1$ como $x_2$ se moverán con la misma frecuencia. Estas pasarán a través de valores máximos y mínimos al mismo tiempo, y retendrán la relación entre $x_2$ y $x_1$ como un valor característico de esta frecuencia natural particular.

Si suponemos que el movimiento es armónico simple, lo que hemos encontrado apropiado, según el método de energía de Rayleigh

$$x_1 = X_1 \operatorname{sen}\omega t \quad \text{y} \quad x_2 = X_2 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\dot{x}_1 = X\omega \cos \omega t \qquad \dot{x}_2 = X_2\omega \cos \omega t$$



*Fig. 3.3*




Igualando la energía potencial máxima a la energía cinética máxima, y resolviendo para $\omega^2$,

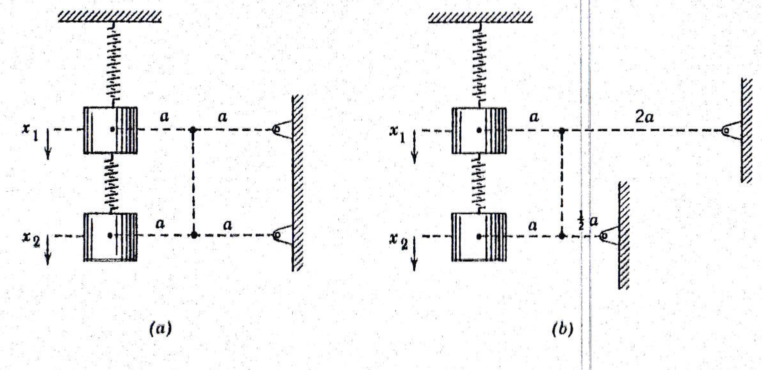
$$\Delta T_{\text{máx}} = \Delta V_{\text{máx}}$$
$$\tfrac{1}{2}m_1\omega^2X_1{}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\omega^2X_2{}^2 = \tfrac{1}{2}kX_1{}^2 + \tfrac{1}{2}k(X_2 - X_1)^2 \qquad (3.18)$$
$$\omega^2 = \frac{kX_1{}^2 + k(X_2 - X_1)^2}{m_1X_1{}^2 + m_2X_2{}^2}$$

El valor obtenido para $\omega^2$ es, por supuesto, una función de las amplitudes $X_1$ y $X_2$. Nótese que ésta es una función en la que el numerador es una función de la energía potencial, y el denominador es una función de la energía cinética. Se hace referencia de esta expresión como de la *Fracción de Rayleigh* o el *Cociente de Rayleigh*. En el caso de un grado único de libertad, $\omega_n{}^2$ no es una función de la amplitud, ya que es una *frecuencia natural*, y la amplitud elevada al cuadrado aparece en los términos tanto de energía cinética como de energía potencial.

Suponiendo una relación proporcionada entre $X_1$ y $X_2$, el valor de $\omega^2$ sería función de esa proporción, o, más específicamente, de la restricción impuesta sobre el sistema. Tenemos en efecto, restringido al sistema de dos masas a moverse de un modo, y sólo de uno. Al hacer esto, sin embargo, imponemos fuerzas sobre $m_1$ y $m_2$ a través de nuestros elementos de restricción. Examinemos esta restricción y minimicemos estas fuerzas.

Como ejemplo, se puede restringir al sistema de dos masas por medio de un eslabonamiento, como en las Figs. 3.4a y b. El problema ha sido simplificado también haciendo $m_1 = m_2 = m$, y $k_1 = k_2 = k$. Con estas simplifica-

Fig. 3.4




ciones, es más fácil ver el concepto del principio de Rayleigh sin añadir la confusión de masas y resortes diferentes. Gracias al eslabonamiento particular de la Fig. 3.4a, $X_2 = X_1$ y $\omega^2 = \frac{1}{2}k/m$. La idea de una restricción física, nos ayuda a aceptar la idea de que el sistema puede moverse con sólo una frecuencia y un modo. Si restringimos al sistema a moverse de manera que $X_2 = X_1$, como en la Fig. 3.4b, cuya restricción es físicamente más lógica, $\omega^2 = \frac{2}{5}k/m$. Cada valor ha sido determinado sustituyendo en la Ec. 3.18.

Ninguno de estos valores es una frecuencia natural. Si sustituimos $\omega^2 = \frac{1}{2}k/m$, y su correspondiente forma de modo $X_2 = X_1$ en las ecuaciones de movimiento, $\Sigma F_1 = m_1\ddot{x}_1$ y $\Sigma F_2 = m_2\ddot{x}_2$, para sen $\omega t$ en máximo, o

$$\begin{aligned} kX_1 - k(X_2 - X_1) &= m_1\omega^2 X_1 \\ k(X_2 - X_1) &= m_2\omega^2 X_2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Las igualdades no se satisfacen en $X_2 = X_1$. Lo mismo es cierto para $\omega^2 = \frac{2}{5}k/m$ y $X_2 = X_1$. Estas igualdades sólo se pueden verificar si $\omega^2$ es una frecuencia natural y $\omega^2 = \omega_n^2$.

Si restringimos al sistema de dos masas de tal manera que

$$X_2 = \chi X_1$$

y

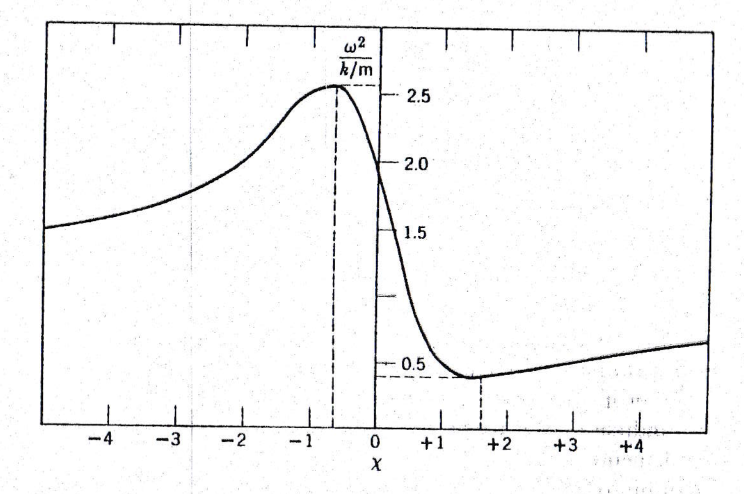
$$\dot{X}_2 = \chi \dot{X}_1$$

$\chi$ es una medida de restricción arbitraria. Otra vez, ésta es solamente una función de la restricción entre $X_2$ y $X_1$. Podemos resolver, para el valor particular de $\chi$ que satisfaga las ecuaciones de movimiento. Esto es, el valor de $\omega^2$ cuando,

$$\omega^2 = \frac{k + k(\chi-1)^2}{m + \chi^2 m} = \left[\frac{1 + (\chi-1)^2}{1+\chi^2}\right]\frac{k}{m} \tag{3.20}$$



Fig. 3.5




Graficando el valor de $\omega^2$ como una función de $\chi$, se obtiene la curva de la Fig. 3.5. El valor de la frecuencia natural fundamental $\omega_1^2 = 382\ (k/m)$, corresponde a un mínimo de la curva. El valor de $\chi$ en el mínimo $\chi = 1.62$, da una forma de modo de $X_2 = 1.62\ X_1$ que satisface ambas ecuaciones de movimiento.

Si investigamos el mínimo de la curva, puede demostrarse que corresponde a una frecuencia natural. Diferenciando con respecto a $\chi$,

$$\frac{d\omega^2}{d\chi} = \left[\frac{2(1+\chi^2)(\chi-1) - 2\chi(1+(\chi-1)^2)}{(1+\chi^2)^2}\right]\frac{k}{m}$$

Sustituyendo $\omega^2$ de la ecuación 3.20

$$\omega^2 = \left[\frac{1+(\chi-1)^2}{1+\chi^2}\right]\frac{k}{m}$$

$$\frac{d\omega^2}{d\chi} = 2\left[\frac{(\chi-1) - (m/k)\chi\omega^2}{1+\chi^2}\right]\frac{k}{m} \tag{3.21}$$

Para la restricción $X_2 = \chi X_2$, las dos ecuaciones de movimiento serían

$$k - k(\chi - 1) = m\omega^2$$

y

$$k(\chi - 1) = m\omega^2\chi$$

El numerador de la Ec. 3.21 es no más que la segunda ecuación cuando $\omega^2 = \omega_n^2$ y

$$\frac{d\omega_n^2}{d\chi} = 0 \tag{3.22}$$

Un cambio en amplitud produce un cambio de segundo orden de la frecuencia, a una frecuencia natural. El numerador de la Ec. 3.21 es igual a cero si $\omega^2 = \omega_n^2$. Este valor del numerador es nada más que una de las ecuaciones de movimiento, lo que debería ser en un balance de fuerzas que satisfaga la segunda ley del movimiento de Newton. En una forma elemental, $d\omega_n^2/d\chi$ es una simple exposición del principio de Rayleigh.

El valor de $\chi$ que satisface el requisito de que $d\omega_n^2/d\chi = 0$, es aquella relación entre las amplitudes $X_2$ y $X_1$ que satisface las ecuaciones de movimiento sin fuerzas exteriores. Nótese que esta relación no impone restricción sobre la magnitud absoluta de $X_2$ y $X_1$, pero requiere que éstas tengan una relación específica. Esta relación es única y se denomina el *vector característico* o *vector propio* para la frecuencia natural, *valor característico* o *valor propio*, $\omega_n^2$ vector propio es un valor matemático, pero no es un vector físico, y no debe confundirse con el desplazamiento, la velocidad o la aceleración. Este es simplemente un conjunto de números que describe el modo de vibración. Este conjunto de números se puede traducir a los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración, si se conoce el valor absoluto de uno de estos vectores físicos.

Una exposición más general del principio de Rayleigh es que *para un sistema lineal no existirá cambio en la frecuencia natural, al cambiar la amplitud o la forma de modo.* Bajo estas condiciones, para la frecuencia natural fundamental, la forma de modo de vibración será tal que la distribución de energías cinética y potencial, hará que la frecuencia de vibración sea un mínimo. Estas afirmaciones son físicamente lógicas si se considera que el movimiento armónico simple sólo puede existir si la frecuencia y la amplitud son independientes una de otra.

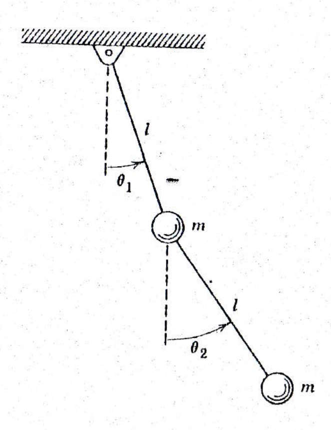
El principio de Rayleigh es válido para cualquier frecuencia natural, aunque su mayor utilidad se encuentra en la determinación del modo y la frecuencia de la fundamental. Debe ponerse otra vez atención al papel que desempeña la restricción en el principio de Rayleigh. Es esencial que exista una forma de modo que sea función sólo de la relación que guardan entre sí las coordenadas generalizadas. Cualesquiera aproximaciones de la forma de modo para la fundamental, darán siempre una frecuencia que es más alta que la frecuencia natural. Resultará una mejor aproximación a la verdadera forma de modo con frecuencias más bajas. Si la diferenciación se hace difícil, el método de suposiciones y comprobaciones mostrará rápidamente cuáles aproximaciones son mejores.

---

### *PROBLEMA EJEMPLO 3.36*

Aproxímese, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural y la forma de modo para la frecuencia natural más baja, del péndulo doble.






*Solución:*

$\theta_1$ y $\theta_2$ son las coordenadas generalizadas que reconocen la restricción sobre el péndulo doble. La posición de referencia se selecciona como la posición en la que $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, la que también es la posición de equilibrio. En cualquier posición, el cambio en energía potencial es

$$\Delta V = mg(l - l\cos\theta_1) + mg(l - l\cos\theta_1 + l - l\cos\theta_2)$$

Usando la aproximación,

$$1 - \cos\theta_1 = \frac{\theta_1^2}{2}$$

y

$$1 - \cos\theta_2 = \frac{\theta_2^2}{2}$$

$$\Delta V = \left(mg\theta_1^2 + mg\frac{\theta_2^2}{2}\right)l$$

El cambio en energía cinética es,

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

con ayuda de la cinemática elemental, $v_1 = l\dot{\theta}_1$ y $v_2 = l\dot{\theta}_1 + l\dot{\theta}_2$. Para pequeñas oscilaciones

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Suponiendo movimiento armónico simple de las coordenadas generalizadas $\theta_1$ y $\theta_2$

$$\theta_1 = \Theta_1 \operatorname{sen} \omega_n t$$
$$\theta_2 = \Theta_2 \operatorname{sen} \omega_n t$$

Haciendo al cambio máximo de energía cinética igual al cambio máximo de energía potencial,

$$\Delta T_{\text{máx}} = \Delta V_{\text{máx}}$$

$$\tfrac{1}{2}ml^2\Theta_1^{\,2}\omega^2 + \tfrac{1}{2}ml^2(\Theta_1+\Theta_2)^2\omega_n^{\,2} = mgl\Theta_1^{\,2} + mgl\frac{\Theta_2^{\,2}}{2}$$

En este punto definamos la forma de modo,

$$\chi(\theta) = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

y sustituyamos esta expresión en la última ecuación. Esto da la fracción de Rayleigh, que es una ecuación para $\omega_n^2$.

$$\omega_n^{\,2} = \frac{g}{l}\,\frac{2+\chi^2}{1+(1+\chi)^2}$$

Aplicando el principio de Rayleigh, $d\omega^2/d\chi = 0$ se obtendrá una ecuación cuadrática para

$$\chi^2 - 2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los vectores característicos para las frecuencias naturales, $\chi = \pm\sqrt{2}$. La raíz positiva representa la forma de modo más baja para la que

$$\omega_n^{\,2} = 0.586\,\frac{g}{l}$$

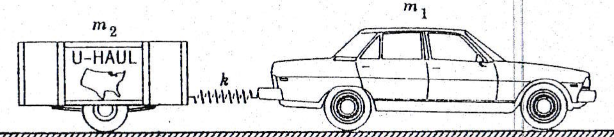
La raíz negativa y la forma de modo negativa representan la segunda frecuencia natural.

---

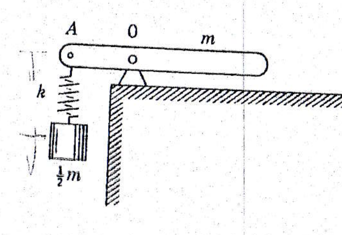
**PROBLEMA 3.37**

Un automóvil $m_1$, usa un enganche de parachoques para tirar de un remolque cargado $m_2$. El parachoques actúa como un resorte elástico, $k$. Determínense, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural y la forma de modo para el sistema de dos masas. Nótese que éste es un sistema de dos masas degenerado y una frecuencia natural de éste es $\omega_n^2 = 0$. Encuéntrese la otra frecuencia natural.

Respuesta: $\omega_n^{\,2} = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$



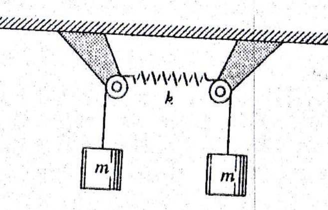



**PROBLEMA 3.38**

Una barra larga, esbelta, de masa $m$, está pivotada en un punto 0 y soporta una masa de ½$m$ en su extremo izquierdo $A$. En la posición de equilibrio mostrada, la barra y la masa $m$ están perfectamente equilibradas. El módulo del resorte es $k$. Calcúlese, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural del sistema.

Respuesta: $\omega_n^{\,2} = 3\,\frac{k}{m}$

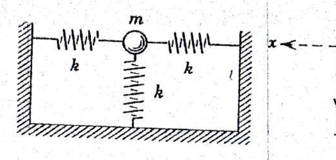



**PROBLEMA 3.39**

Aproxímese, usando el principio de Rayleigh, para el sistema de dos masas mostrado, el modo fundamental y determínese la frecuencia ($\omega^2$).

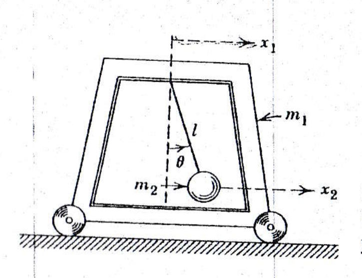
Respuesta: $\omega_n^{\,2} = \frac{2k}{m}$





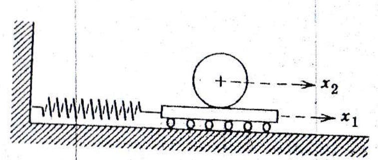

**PROBLEMA 3.40**

Determínese, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural más baja y la forma de modo para el sistema de resortes y masa mostrado. *Indicio:* Usese $y = \chi x$ como expresión de la forma de modo.




**PROBLEMA 3.41**

Determínense las dos frecuencias naturales y formas de modo para el marco y péndulo mostrados. El péndulo oscila libremente en el mismo plano en el que se mueve el marco. *Indicio:* Determínese una expresión para la energía cinética y la energía potencial del sistema en términos de las coordenadas generalizadas $x_1$ y $x_2$.




**PROBLEMA 3.42**

Una plataforma soporta un cilindro circular y está a su vez soportada elásticamente de la pared por medio de un resorte de módulo $k$. Cada uno tiene una masa $m$. Calcúlense, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural y el modo del sistema, si el cilindro rueda sin amortiguación.

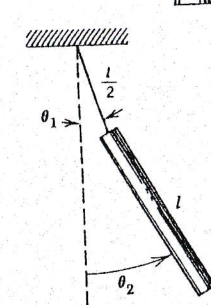
Respuesta: $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{4m}}$; $3x_2 = x_1$

**PROBLEMA 3.43**

Usese el principio de Rayleigh para determinar la frecuencia natural más baja y la forma de modo para el sistema que se muestra. Se puede considerar a la polea como un cilindro circular sólido.

$m_1 = m$
$m_2 = 2m$
$r_1 = \frac{1}{2} r_2$

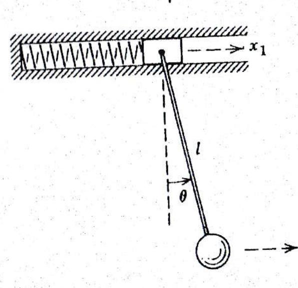
Respuesta: $\omega_n^2 = 0.117 \frac{k}{m}$; $x_2 = 2.265 x_1$




**PROBLEMA 3.44**

Aplíquese el principio de Rayleigh a la barra esbelta suspendida como péndulo, para aproximar el modo fundamental de vibración y su frecuencia natural.

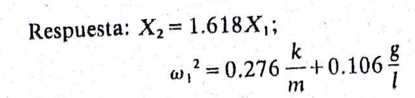
Respuesta: $\omega_1^2 = 0.916 \frac{g}{l}$



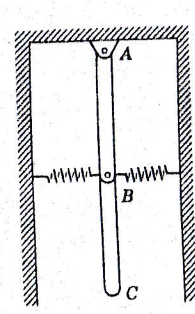

**PROBLEMA 3.45**

Una masa $m$ está restringida a moverse en una guía horizontal lisa, y está soportada elásticamente por el resorte $k$. A su vez, la masa deslizante es el punto de soporte del péndulo simple de longitud $l$ y masa idéntica $m$. Determínese, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural más baja. Supóngase que las oscilaciones son pequeñas. Por separado, el péndulo, el resorte y la masa $m$, tienen frecuencias naturales idénticas, es decir, $k/m = g/l$.

Respuesta: $X_2 = 1.618 X_1$;

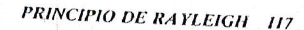


$$\omega_1^2 = 0.276 \frac{k}{m} + 0.106 \frac{g}{l}$$




**PROBLEMA 3.46**

Encuéntrense, usando el principio de Rayleigh y los resultados del Prob. 3.44 la frecuencia natural más baja y la forma de modo del sistema. Supóngase que la energía potencial elástica del resorte es grande en comparación con la energía potencial de posición de los pesos ($\Delta V_s = 0$).




**PROBLEMA 3.47**

Encuéntrense, usando los resultados del Prob. 1.45, y el principio de Rayleigh, la frecuencia natural más baja y la forma de modo. Para el propósito de este problema supóngase que $g/l = k/m$.

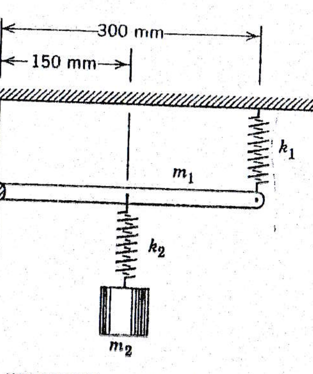
Respuesta: $\omega_n^2 = 0.956 \frac{k}{m}$ o $0.956 \frac{g}{l}$



**PROBLEMA 3.48**

Determínese, usando el principio de Rayleigh, la frecuencia natural más baja y la forma de modo, para el sistema de dos masas. Los resortes son idénticos y las masas son iguales.

Respuesta: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$; $x_2 = x_1$

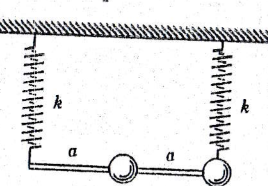



**PROBLEMA 3.49**

Usando el principio de Rayleigh, determínese la frecuencia natural más baja del sistema mostrado.

$k_1 = 10$ N/mm
$k_2 = 20$ N/mm
$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 3$ kg

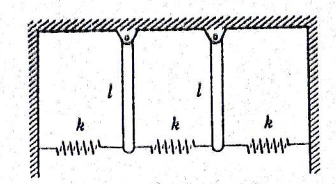
Respuesta: $f_n = 9.02$ Hz




**PROBLEMA 3.50**

Usando el principio de Rayleigh, aproxímese el modo fundamental para el sistema mostrado y determínese la frecuencia aproximada ($\omega_n^2$).

Respuesta: $\omega_n^2 = 0.764 \frac{k}{m}$




**PROBLEMA 3.51**

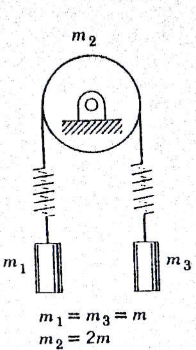
Usando el principio de Rayleigh, determínese la frecuencia natural más baja y la forma de modo para los dos péndulos acoplados.

Respuesta: $\omega_n^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3k}{m}$ ; $\theta_2 = \theta_1$

**PROBLEMA 3.52**

Usando la fracción de Rayleigh, calcúlense la frecuencia natural más baja y la forma de modo, para el sistema de tres masas. Los resortes son iguales y las masas son iguales.

Respuesta: $\omega_1^2 = 0.198\,\frac{k}{m}$




**PROBLEMA 3.53**

Calcúlense, usando la fracción de Rayleigh, la frecuencia natural más baja y la forma de modo para el sistema dado. Se puede considerar a las poleas como un cilindro circular sólido. *Indicio:* Considérese simetría al calcular las formas de modo.

Respuesta: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

# CUATRO

# MOVIMIENTO PERIODICO FORZADO

## 4.1 INTRODUCCION

Un sistema elástico sometido a fuerzas externamente aplicadas, se denomina *forzado*, y el movimiento de oscilación que resulta en el mismo debido a las fuerzas externamente aplicadas, se llama *vibración forzada*. Si existe disipación de energía o *amortiguación*, el movimiento es una *vibración forzada amortiguada*. Cuando parte del movimiento desaparece después de un periodo de tiempo, se conoce a esa parte como *transitoria*. La parte que permanece después que ha desaparecido la parte transitoria, se llama la *vibración de estado estable*.

La vibración transitoria tiene inmensa importancia cuando se implican choque, impacto y cargas en movimiento. Este movimiento no es necesariamente periódico, y pueden atribuirse por lo general las fallas mecánicas a que se ha excedido la resistencia mecánica de algún componente. En el siguiente capítulo se estudiará con cierto detalle el movimiento transitorio.

La vibración de estado estable, subsiste mucho tiempo después de que se ha extinguido la vibración transitoria. Esta se asocia por lo general con la operación continua de la maquinaria, y si ocurre una falla mecánica debida a ésta, por lo general sucede por el mecanismo de fatiga, después de un prolongado periodo de tiempo. En ciertos casos, el mismo fenómeno de movimiento puede presentar diferentes aspectos en distintas estructuras. Un automóvil que se mueve sobre un puente, constituye una carga transitoria para la estructura del puente, sin embargo, para el bastidor del automóvil, el movimiento sobre el puente constituye sólo un breve intervalo de operación de estado estable. Nuestras definiciones de vibración transitoria, y de estado estable, se sobreponen.

Aunque prácticamente casi nunca ocurre la vibración de estado estable sin la presencia de cierto grado de amortiguación o disipación de energía, el efecto de la amortiguación es pequeño a menos que la amplitud de movimiento sea grande. Ya que la amortiguación complica el estudio de la vibración forzada y los varios tipos de amortiguación no producen efectos similares, se diferirá el estudio de la vibración forzada amortiguada en favor de una concentración sobre los aspectos físicos de *resonancia, aislamiento de vibración* y *respuesta*.

## 4.2 VIBRACION ARMONICA FORZADA NO AMORTIGUADA, F($t$) = F$_1$ sen $\omega t$

Consideremos el movimiento, con un grado único de libertad, de un sistema de resorte y masa sometido a una fuerza armónicamente variable, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1$ sen $\omega t$. $F_1$ es el valor máximo de la fuerza impuesta, y $\omega$ es el valor de la frecuencia con la cual varía, en radianes/segundo, la fuerza $F(t)$. Haciendo referencia a la Fig. 4.1, por la segunda ley del movimiento de Newton, la ecuación del movimiento $\Sigma \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ se torna

$$-k\mathbf{x}+\mathbf{F}(t)=m\ddot{\mathbf{x}} \tag{4.1}$$

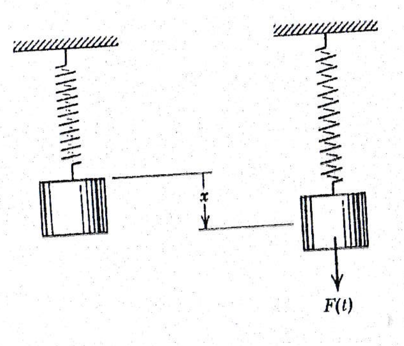
Como puede verse del diagrama de cuerpo libre, la aceleración tiene la dirección de la fuerza impuesta, y la fuerza del resorte es opuesta a la fuerza impuesta. Redisponiendo términos y usando los componentes escalares en la dirección de la coordenada $x$,

$$m\ddot{x}+kx=F_1 \text{ sen } \omega t \tag{4.2}$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_1}{m}\text{ sen } \omega t$$

Matemáticamente, ésta es una forma particular de la Ec. 2.2. La solución debe contener la integral general para la ecuación diferencial de movimiento, incluyendo las constantes arbitrarias necesarias, así como una integral particular que satisfaga la forma particular de la Ec. 4.2.

**Fig. 4.1**






$$x=A\cos\omega_n t+B\text{ sen }\omega_n t+\frac{F_1}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\text{ sen }\omega t \tag{4.3}$$

Los primeros dos términos se llaman transitorios, aun cuando no exista amortiguación en el caso particular. Estos dependen de las condiciones iniciales y después de un periodo de tiempo, con cualquier cantidad medible de amortiguación, la influencia de estos términos es pequeña. En el estado estable, sólo necesitamos dirigir nuestra atención al último término, que se denomina el término de estado estable. Este no se afecta por las condiciones iniciales, y permanece en tanto que se aplique la función forzante. Omitiendo los términos transitorios,

ECUA. DESPLAZAMIENTO
$$x=\frac{F_1}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\text{ sen }\omega t \tag{4.4}$$

Este es similar al desplazamiento armónico $x = X$ sen $\omega t$, en donde el desplazamiento máximo,

$$X=\frac{F_1}{m(\omega_n^2-\omega^2)}$$
DESPLAZA. MAX

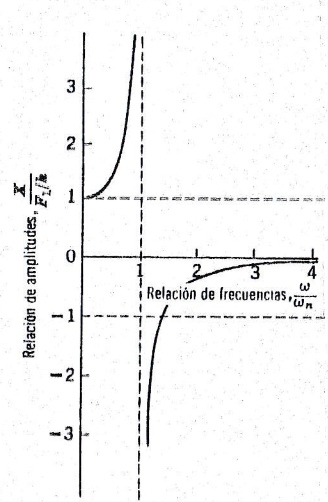
Las funciones forzantes que varían armónicamente, causan un desplazamiento armónicamente variable, estando relacionado el valor máximo de la fuerza, $F_1$ con el valor máximo del desplazamiento $X$. Sustituyendo $k = m\omega_n^2$,

$$\frac{X}{F_1/k}=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{4.5}$$

En la Fig. 4.2 se grafica la Ec. 4.5 en forma adimensional,

$\omega_n^2 = \frac{K}{m}$

**Fig. 4.2**



graficándose la *relación de amplitudes* $X/(F_1/k)$ adimensional, como una función de la *relación de frecuencias* adimensional $\omega/\omega_n$. A frecuencias bajas, cuando $\omega \ll \omega_n$, la amplitud de movimiento es aproximadamente $F_1/k$ que es la deformación que el sistema elástico tendría si $F_1$ fuera una fuerza estática. Se hace referencia a ésta algunas veces como de la "deformación estática" $\Delta_{st}$. A altas frecuencias, cuando $\omega \gg \omega_n$, el movimiento será muy pequeño, llegando a ser menor y menor al aumentar la relación de frecuencia. Cuando la frecuencia forzante y la frecuencia natural son casi iguales, es evidente que pueden resultar amplitudes de vibración muy grandes, a partir de fuerzas muy pequeñas. La condición $\omega = \omega_n$ en la que la relación de amplitudes es infinita, se conoce como *resonancia*.

La variación de amplitud o relación de amplitudes con la frecuencia, se llama la *respuesta* del sistema. Para valores de $\omega < \omega_n$, la relación de amplitud es positiva. Para $\omega > \omega_n$, la relación de amplitudes es negativa. Esta es otra forma de decir que el movimiento está en fase con la fuerza aplicada para $\omega < \omega_n$, y el movimiento y la fuerza aplicada están fuera de fase para $\omega > \omega_n$.

## 4.3 VIBRACION FORZADA CAUSADA POR $F(t) = F_1 e^{i\omega t}$

Si la función forzante hubiera sido la función exponencial $F(t) = F_1 e^{i\omega t}$, la ecuación de movimiento sería

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_1}{m} e^{i\omega t} \tag{4.6}$$

Para la cual la solución es

$$x = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{F_1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \tag{4.7}$$

En el estado estable de desplazamiento es $x = Xe^{i\omega t}$, en donde el desplazamiento máximo $X$ es exactamente el mismo que en la Ec. 4.5.

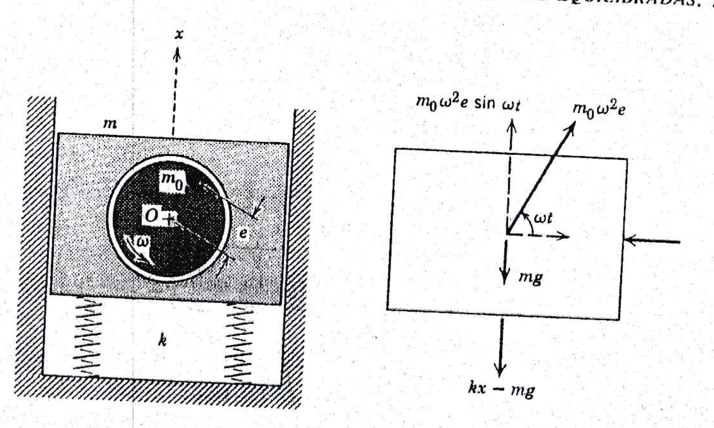
$$\frac{X}{F_1/k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

## 4.4 VIBRACION FORZADA CAUSADA POR FUERZAS EN ROTACION NO EQUILIBRADAS, $F(t) = m_0\omega^2 e \operatorname{sen} \omega t$

Una fuente obvia de vibración forzada, la constituye el desequilibrio de partes en rotación. Si el centro de gravedad de una masa $m$ no equilibrada tiene una excentricidad radial, a partir del eje geométrico de rotación, $e$, la fuerza



Fig. 4.3




aplicada es $F(t) = m\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$. El desplazamiento $x$ es una función no sólo de la excentricidad, sino también de la relación de masas $m_0/m$, en donde $m$ es toda la masa soportada por el sistema elástico, incluyendo la masa rotativa no equilibrada, $m_0$. La Fig. 4.3 muestra una masa no equilibrada $m_0$ girando alrededor de un eje geométrico en $O$. Toda la masa $m$, que incluye al rotor, está restringida a moverse en sólo una dirección. Se ignora el movimiento lateral. Si éste se halla presente, podría considerarse del mismo modo que el movimiento vertical, pero esto añadiría otro grado de libertad.

Sustituyendo la fuerza no equilibrada $m_0\omega^2 e$ por $F_1$, el desplazamiento de estado estable se torna

$$x = \frac{m_0\omega^2 e}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \omega t$$

Redisponiendo términos, se puede expresar el desplazamiento máximo $X$, como

$$X = \frac{m_0\omega^2 e}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

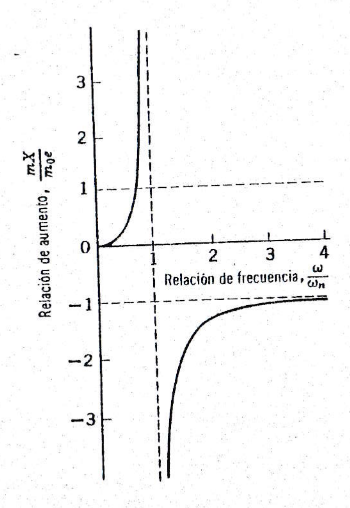
o

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{4.8}$$

$mX/m_0e$, es la *relación de amplificación* del sistema y es también adimensional.

La Fig. 4.4 presenta la graficación adimensional de $mX/m_0e$ como función de la relación de frecuencias $\omega/\omega_n$. A bajas frecuencias, cuando $\omega \ll \omega_n$, el factor de amplificación se encuentra cerca del cero. La fuerza rotativa no equilibrada es significante, y no existe vibración. En la resonancia, $\omega = \omega_n$, y

Fig. 4.4




el factor de amplificación y la amplitud de movimiento son infinitos. A altas frecuencias, cuando $\omega \gg \omega_n$, $X \to -(m_0/m)e$. Si la masa rotativa $m_0$, es una fracción pequeña de la masa total $m$, la amplitud de vibración es proporcionalmente pequeña. Esta es la razón por la cual algunas máquinas tienen bastidores muy pesados, o se sujetan a grandes bloques de base hechos de concreto. El disminuir la relación $m_0/m$, contituye un modo de disminuir la amplitud de vibración.

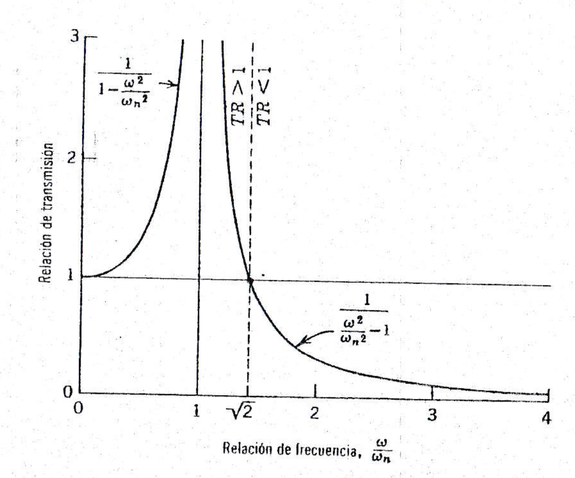
## 4.5 FUERZAS TRANSMITIDAS Y AISLAMIENTO DE VIBRACION

Es claro que la condición de resonancia mecánica constituye algo que se debe evitar si se tienen como objetivos una duración prolongada y una operación silenciosa. En la resonancia, la amplitud de movimiento llega a ser muy grandes, y el sistema de masa y resorte se destroza literalmente, por supuesto, existen circunstancias en las que se desea la resonancia mecánica. Los agitadores mecánicos encuentran numerosos usos industriales. Es importante la cuestión de qué tan más allá de la condición de resonancia se conserva la seguridad de operación, y ésta se puede contestar considerando la fuerza transmitida a través del resorte.

La fuerza perturbadora puede ser transmitida a través del resorte hacia la cimentación o el piso, solamente si el resorte se ha extendido o acortado. Si $X$ es el desplazamiento máximo del resorte, entonces la fuerza máxima transmitida es $kX$. Por supuesto, ésta se añade a cualquier fuerza estática que ya existe dentro del resorte o la estructura de soporte. La *relación de transmisión* se



Fig. 4.5




define como la fracción de la fuerza perturbadora máxima que en realidad se transmite a la base del resorte o a la cimentación

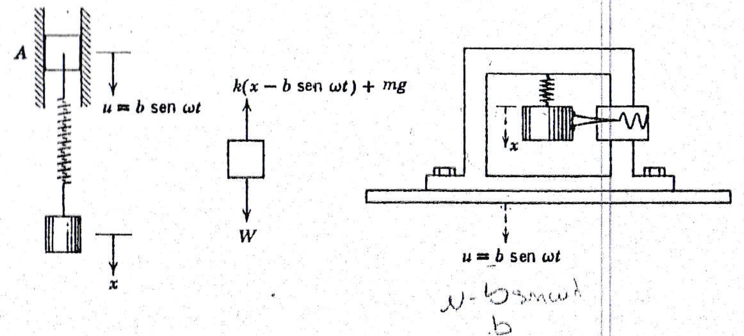
$$\text{Relación de transmisión} = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{4.9}$$

En la Fig. 4.5, se muestra una gráfica de la relación de transmisión. Esta es similar a la Fig. 4.2, excepto que sólo se muestra el valor positivo en el que $\omega/\omega_1 > 1$. La fuerza transmitida puede ser menor que la fuerza perturbadora, sólo si la frecuencia forzante excede a la frecuencia natural del sistema elástico en por lo menos un factor de $\sqrt{2}$. Esto significa que, para una operación suave, la frecuencia natural de la estructura de soporte debe ser considerablemente más baja que la frecuencia de excitación. Como se muestra en la Fig. 4.5, para toda la región en la que $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$, la relación de transmisión es mayor que 1. En este caso, una estructura de soporte elástica, haría más daño que provecho. Se ha hecho costumbre especificar la relación de transmisión como un número positivo, ignorándose la relación de fases.

## 4.6 VIBRACION FORZADA CAUSADA POR MOVIMIENTO ARMONICO DEL PISO

El movimiento de la base o el piso, puede muy bien producir una vibración indeseada de una estructura elástica que descanse sobre ellas. Este es el problema inverso del anterior. Como ejemplo, considérese el sistema elástica-

Fig. 4.6




mente soportado de la Fig. 4.6 en el cual el sistema de resorte y masa se encuentra sometido al movimiento $u = b$ sen $\omega t$.

El desplazamiento de la masa $m$, es la coordenada generalizada $x$, pero la deformación del resorte elástico es el desplazamiento relativo entre la masa $m$ y el punto $A$. El punto $A$ se desplaza $u = b$ sen $\omega t$.

La ecuación de movimiento es

$$-k(x-u)=m\ddot{x}$$

o

$$m\ddot{x}+kx=ku=kb \text{ sen } \omega t \qquad (4.10)$$

Esta ecuación es similar a la Ec. 4.2. El problema de la cimentación vibrante es análogo al problema de la fuerza armónicamente variable, sustituyendo $kb$ por $F_1$. Usando esta analogía, la solución de estado-estable, es

$$x=\frac{b}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \text{ sen } \omega t \qquad (4.11)$$

La fracción $X/b$ en donde $x = X$ sen $\omega t$, es idéntica a la relación de amplitudes de la Fig. 4.2.

El movimiento relativo entre la masa $m$ y el extremo del resorte elástico, el punto $A$, es $z = x - u$. La ecuación de movimiento, Ec. 4.10, puede expresarse en términos de movimiento relativo, $z$, ya que $x = z + u$, y $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{u}$,

$$-k(x-u)=m\ddot{x}$$

$$-kz=m(\ddot{z}+\ddot{u})$$

y

$$m\ddot{z}+kz=-m\ddot{u}=mb\omega^2 \text{ sen } \omega t \qquad (4.12)$$

Esta ecuación es también similar a la Ec. 4.2, habiéndose sustituido a $mb\omega^2$ por $F_1$. La expresión de estado-estable para el movimiento relativo $z$, donde $z = Z$ sen $\omega t$



$$\frac{Z}{b}=\frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \qquad (4.13)$$

La fracción $Z/b$ es idéntica a la *relación de amplificación* de la Fig. 4.4.

## 4.7 INSTRUMENTOS PARA MEDICION DE LA VIBRACION

Se puede describir el movimiento de los instrumentos para la medición de la vibración sísmica no amortiguada, por medio de los sencillos principios dinámicos anteriores. La palabra "sísmico", y sus variaciones, sismómetro y sismógrafo, se derivan de la palabra griega "seismos" que significa tierra.

El segundo ejemplo de la Fig. 4.6, muestra un instrumento para medición de vibraciones, registrando una gráfica senoidal del movimiento relativo entre la masa $m$ y el marco. Si la frecuencia natural es muy baja, $\omega/\omega_n \gg 1$, el movimiento relativo será casi idéntico con el movimiento de la cimentación, $Z \to -b$, y el trazo registrado de la vibración será una gráfica del movimiento de la cimentación o base. Un instrumento que registra el desplazamiento de la vibración, se denomina vibrómetro. Su precisión es función estricta de cuán baja es la frecuencia natural en relación con la frecuencia de excitación, $\omega$. Para los sismógrafos, que registran los temblores de tierra en los que los periodos pueden ser largos, se requieren frecuencias naturales del orden de 5 a 10 ciclos por minuto.

Un acelerómetro, es un instrumento de medición de vibraciones que mide la aceleración. Retornando a la Ec. 4.13,

$$z=Z \text{ sen } \omega t=\frac{b\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \text{ sen } \omega t$$

$$=\frac{b\omega^2}{\omega_n^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \text{ sen } \omega t=\frac{\ddot{u}}{\omega_n^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}-1\right)}$$

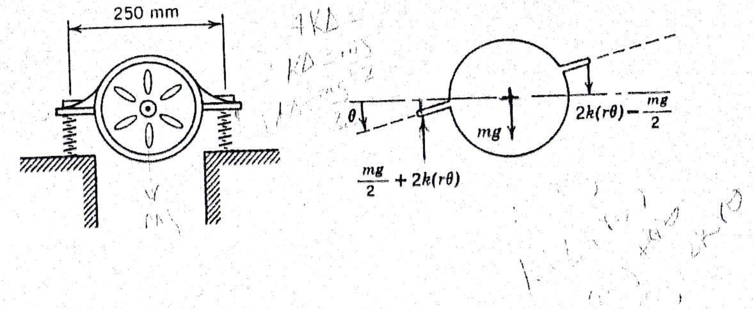
Para $\omega/\omega_n \ll 1$, el denominador es aproximadamente constante, y el movimiento relativo es proporcional a $\ddot{u}$. El registro de vibración será un registro de la aceleración de la cimentación o base. Infortunadamente, las armónicas altas pueden encontrarse en resonancia con la frecuencia natural. La presencia de armónicas más altas destruiría el significado de un registro de acelerómetro, a menos que el instrumento estuviera amortiguado. Para un instrumento medi-

dor de desplazamiento, sería verdad lo inverso. No es necesaria la amortiguación, y sin duda si ésta se hallara presente, podría reducir la precisión de la medición del desplazamiento. Es posible también integrar dos veces la salida de un acelerómetro y obtener un registro desplazamiento-tiempo. Lo anterior se hace con frecuencia, ya que los acelerómetros son más pequeños y más fácilmente adaptables que los más grandes y voluminosos vibrómetros sísmicos.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 4.1*

Un motor eléctrico tiene una masa de 10 kg y está montado en cuatro resortes idénticos, cada uno de ellos de módulo de resorte de 1.6 N/mm. El radio de giro del conjunto de motor con respecto al eje de la flecha, es de 100 mm. Si la velocidad de trabajo del motor es de 1 750 rpm, determínese la relación de transmisión para vibración vertical, y para la vibración torsional.




***Solución:***
La frecuencia natural del movimiento vertical, se puede encontrar con bastante facilidad, a partir de las constantes del sistema. Existen cuatro resortes, cada uno con una constante de proporcionalidad conocida. La constante total de resorte será cuatro veces la de un solo resorte. Se conocen el peso del motor y la velocidad de operación.

$$\omega_n^2 = \frac{k_e}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{4(1.6)10^3}{10} = 640\ s^{-2}$$

Se sigue la relación de transmisión del movimiento vertical,

$$TR = \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right|$$



o

$$TR = \frac{1}{\frac{[\frac{2\pi}{60}(1750)]^2}{640} - 1} = 0.01943$$

Para la vibración torsional, debe encontrarse la constante de resorte torsional en términos de la constante conocida de los resortes lineales. Cada resorte se deforma $r\theta$ para un desplazamiento angular $\theta$. El radio $r$ = 125 mm.

En este problema, el eje geométrico es también el centro de masa y tomando la suma de momentos con respecto al centro de masa,

$$\sum \mathbf{M}_G = I_G \ddot{\theta}$$

$$-\left(\frac{mg}{2} + 2kr\theta\right) r - \left(2kr\theta - \frac{mg}{2}\right) r = I_G \ddot{\theta}$$

$$I_G \ddot{\theta} + 4kr^2 \theta = 0$$

Esta es similar a la Ec. 2.14 en la que la constante de resorte torsional es

$$K = 4kr^2$$

Nótese que se cancela la fuerza estática del peso. A partir de estas ecuaciones, es fácil concluir que

$$\omega_n^2 = \frac{4kr^2}{I_G}$$

$$\omega_n^2 = \frac{4(1.6)(0.125)^2 10^3}{10(0.1)^2} = 1000^{-2}$$

La relación de transmisión en vibración torsional es

$$TR = \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right|$$

o

$$TR = \frac{1}{\frac{[\frac{2\pi}{60}(1750)]^2}{1000} - 1} = 0.0307$$

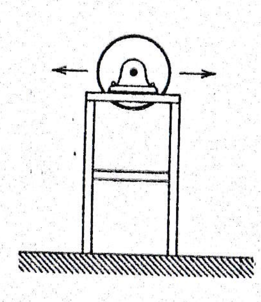
El modo torsional tiene una frecuencia natural más alta, que se halla más cercana a la velocidad de operación y se transmite más vibración torsional.

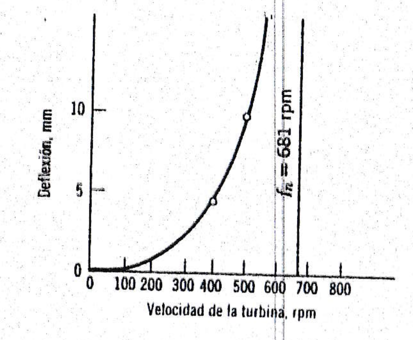
Si el centro de gravedad no estuviera localizado en el plano de soporte, se acoplarían los modos vertical y torsional y el problema de aislamiento se volvería más complejo. Para evitar el excitar el modo vertical a través de la

vibración torsional, y evitar también excitar el modo torsional con la vibración vertical, es una buena práctica colocar el plano de soporte de modo que contenga al centro de masa.

## PROBLEMA EJEMPLO 4.2

Un marco de acero soporta un ventilador de extracción impulsado por turbina. A una velocidad de 400 rpm, la amplitud horizontal de movimiento es de 4.5 mm, medidos al nivel de piso del ventilador. A una velocidad de 500 rpm, la amplitud es de 10 mm. No se observa condición de resonancia al cambiar la velocidad de 400 rpm a 500 rpm. Para disminuir esta intolerable vibración, se proporne colocar una losa de concreto debajo de la turbina. ¿Cuál sería el efecto de esta masa sumada? Calcúlese la amplitud de movimiento a 400 rpm, si esta losa duplica la masa efectiva de la estructura. ¿Qué sucede a 500 rpm?






**Solución:**
Ya que la amplitud aumenta al aumentar la velocidad de la turbina, la condición de resonancia se encuentra algo más arriba de 500 rpm, $\omega_n > 500(2\pi)/60$. Si suponemos que estas dos fracciones de información observada se encuentran exactamente sobre la curva esperada, podemos resolver, tanto para la frecuencia resonante, como para el parámetro $m/m_0$.

$$\frac{mX}{m_0e} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Tenemos dos ecuaciones,

$$0.0045 = \frac{m_0e}{m}\left[\frac{\left(\dfrac{400}{f_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{400}{f_n}\right)^2}\right]$$



y

$$0.010 = \frac{m_0e}{m}\left[\frac{\left(\dfrac{500}{f_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{500}{f_n}\right)^2}\right].$$

Resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones,

$$\frac{m}{m_0e} = \frac{1}{4.5}\left[\frac{\left(\dfrac{400}{f_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{400}{f_n}\right)^2}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{\left(\dfrac{500}{f_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{500}{f_n}\right)^2}\right]$$

de las que $f_n = 681$ rpm, y

$$\frac{m}{m_0e} = 117\ \text{m}^{-1}$$

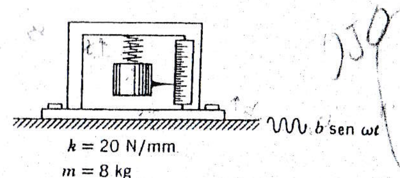
Si se duplicara la masa efectiva, $m/m_0e = 234\ m^{-1}$ y $f_n = 483$ rpm. La amplitud a 400 rpm sería mucho mayor, ya que la losa de concreto agregada, haría descender la frecuencia natural de la estructura, llevando a la frecuencia natural mucho más cerca de la velocidad de operación.

$$\frac{mX}{m_0e} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$x = \frac{1}{234}\left[\frac{\left(\dfrac{400}{483}\right)^2}{1-\left(\dfrac{400}{483}\right)^2}\right] = 9.3\ \text{mm}$$

Probablemente la estructura no resistiría un tránsito de velocidad de 400 a 500 rpm, ya que ocurriría la condición de resonancia a 483 rpm.

Este problema se presentó en la realidad. Se modificó la estructura, pero se vació la losa y se obtuvo una frecuencia natural más baja. Como dato registrado, la vibración fue tan severa, que nunca se llevó la velocidad de la turbina a más de 250 rpm, lo que hizo inútil al ventilador de extracción.

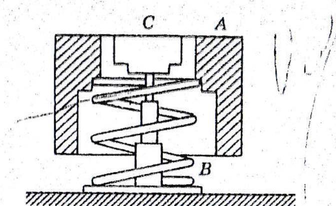



**PROBLEMA 4.3**
Se observa que el indicador del instrumento medidor de vibraciones, se mueve entre las marcas de 0.20 y 0.30 en la escala vertical, cuando éste se somete a una fuerza alternante con frecuencia de 100 rad/s. ¿Cuál sería la carrera si se duplicara la frecuencia forzante?

Respuesta: 0.21 a 0.29

**PROBLEMA 4.4**
Un automóvil de 1 570 kg, se soporta sobre cuatro resortes helicoidales cada uno con un módulo de resorte de 25 N/mm. Al viajar sobre un viaducto elevado, se excita un movimiento resonante vertical. Cada claro del viaducto tiene 25 m de longitud y una flecha de 25 mm a la mitad del claro. Determínese la carrera máxima vertical del automóvil, cuando viaja por el viaducto a 100 km/h. Se desprecia la amortiguación.

Respuesta: 64 mm




**PROBLEMA 4.5**
El vibrómetro de banda es un dispositivo sísmico simple que se utiliza en el trabajo de campo para mediciones aproximadas. La masa sísmica $A$ está suspendida sobre un resorte $B$. La doble amplitud de vibración de un bastidor, cubierta o cimentación, se indica por el barrido de banda del indicador de carátula de calibración. La frecuencia natural del instrumento, es de 4.5 cps. Si la amplitud doble indicada es de 0.95 mm para una frecuencia conocida de 20 cps, ¿cuál es la verdadera amplitud de movimiento?

Respuesta: 0.90 mm

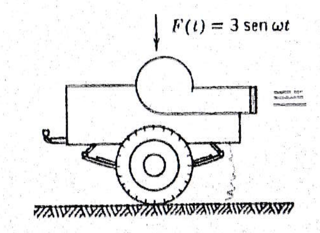
**PROBLEMA 4.6**
Un compresor de aire, de 350 kg impulsado por un motor de gasolina opera a 800 carreras de potencia por minuto. Al montarse sobre cojines de hule, se reduce la vibración transmitida a la cuarta parte del valor que tiene sin los cojines. ¿Cuál es el valor de la deformación estática de los cojines de hule?

Respuesta: 7 mm



**PROBLEMA 4.7**
Si se monta el motor del Prob. 4.6 sobre un bloque de concreto de 50 kg, que a su vez se monta sobre los mismos cojines de hule, ¿cuál es el porcentaje de disminución en la deformación dinámica?

Respuesta: 55.6% de disminución



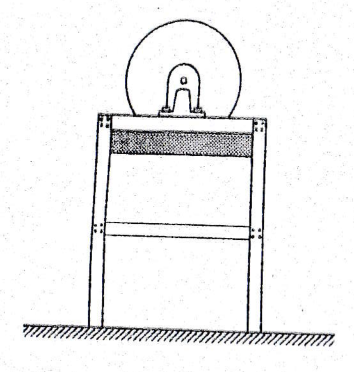

**PROBLEMA 4.8**
Se usa una desmenuzadora portátil, para reducir cortezas, ramas de árbol y recortes de vegetación a piezas de 10 a 30 mm. La desmenuzadora y el remolque tienen una masa de 200 kg. Las llantas y el sistema de soporte tienen una constante elástica de 460 N/mm. Determínese el movimiento vertical de la desmenuzadora, si ésta ejerce una fuerza vertical de 3 sen $\omega t$ en kN, y si la frecuencia de la excitación es de 1 200 rpm.

Respuesta: 1.1 mm

**PROBLEMA 4.9**
En un alejado ingenio azucarero, una máquina de procesamiento está montada sobre una base que a su vez está montada sobre un cojín elástico de corcho y hule. No es posible medir la deflexión estática del cojín, de manera que no se conoce la frecuencia natural. Existen dos velocidades de operación de la máquina, una de 750 rpm y otra 1 500 rpm. A 1 500 rpm, la amplitud de movimiento de la cubierta de la máquina es 40% de la amplitud a 750 rpm. No existe frecuencia resonante entre las 750 rpm y las 1 500 rpm. Estas amplitudes son sólo comparativas, pues no hay modo de calibrar el instrumento medidor de amplitud. Calcúlese, a partir de estos dos valores la frecuencia natural de la máquina y la base.

Respuesta: $\omega_n = 63.9 \text{ s}^{-1}$

**PROBLEMA 4.10**
Durante la instalación de un motor de inducción de 60 ciclos, con masa de 200 kg, se determina por medio de un nivel, que la deformación del piso bajo el motor es de 0.13 mm. La velocidad nominal del motor de inducción es de 1 800 rpm. ¿Recomendaría Ud. aislamiento contra vibración? Explique su respuesta.



**PROBLEMA 4.11**
Un bastidor de acero soporta una masa de concreto de 1 000 kg, la que a su vez soporta un ventilador de extracción impulsado por turbina. A la velocidad de 400 rpm, la amplitud de movimiento es de 4 mm, y a una velocidad de 500 rpm, la amplitud es de 11.6 mm. Determínese, como factor, el cambio de rigidez de resortes necesario para permitir la operación a la velocidad máxima de la turbina de 520 rpm, con una deflexión máxima de 2 mm.

Respuesta: $k' = 2.62$ k

**PROBLEMA 4.12**
Las partes giratorias del conjunto de rueda frontal derecha de un automóvil 1979, tienen una masa de 35 kg y se comprueba que están fuera de equilibrio. El desequilibrio se puede corregir colocando un peso de plomo de 150 g al aro de 375 mm de diámetro de la rueda. La llanta tiene un diámetro de 700 mm. Los resortes del automóvil tienen un módulo de 50 N/mm, y se puede considerar a la llanta un módulo de 600 N/mm, si la deformación de la misma es pequeña. Si no se hace la correción de equilibrio, ¿a qué velocidad ocurrirá vibración resonante del conjunto de rueda? ¿Cuál sería la amplitud de movimiento para una velocidad de 130 km/hr?

Respuesta: 1.1 mm

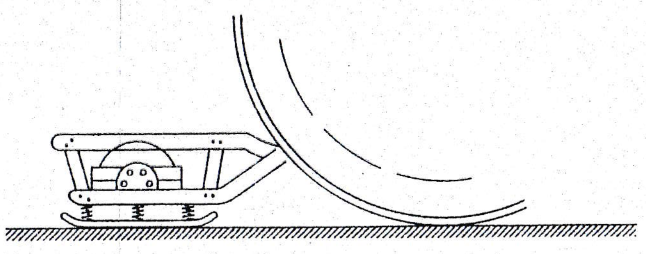
**PROBLEMA 4.13**
Un delicado instrumento aeronáutico está montado sobre cuatro aisladores de hule que tienen una deformación nominal de 5 mm. Lo anterior significa que la deflexión estática del aislador en el equilibrio es de 5 mm. ¿Cuál es la relación de transmisión de la vibración transmitida al instrumento a 1 800 rpm?

**PROBLEMA 4.14**
Para compactar dinámicamente arena y grava, se usa un compactador vibratorio eléctrico. Este se halla montado en el bastidor de una aplanadora de rodillo y está suspendido de ese bastidor por seis aisladores de hule (que trabajan en corte). El motor eléctrico suministra 4 200 golpes por minuto. El compactador y el motor pesan 200 kg. El módulo de los resortes de



hule es de 25 N/mm y se usan 6 para cada compactador. ¿Cuánta fuerza se transmite al bastidor de la aplanadora?

Respuesta: 0.389%



**PROBLEMA 4.15**
Un motor diesel de alta velocidad está montado sobre cuatro cojines de hule, de modo que la deflexión es de 5 mm. Si el motor y el acoplamiento tienen una masa de 300 kg, ¿arriba de qué velocidad deberá trabajar el motor para que se obtenga un aislamiento de 95%? El motor es de cuatro cilindros y ciclo de dos tiempos.

**PROBLEMA 4.16**
Un motor que opera a velocidad de 450 rpm, está soportado sobre cuatro cojines de hule idénticos, y vibra con una amplitud de 3.8 mm. Al arrancar, pasa a través de una frecuencia resonante a 500 rpm. Determínese la amplitud de vibración si el motor estuviera montado en cuatro pares de cojines, consistiendo cada par de dos de los cojines originales dispuestos en serie.

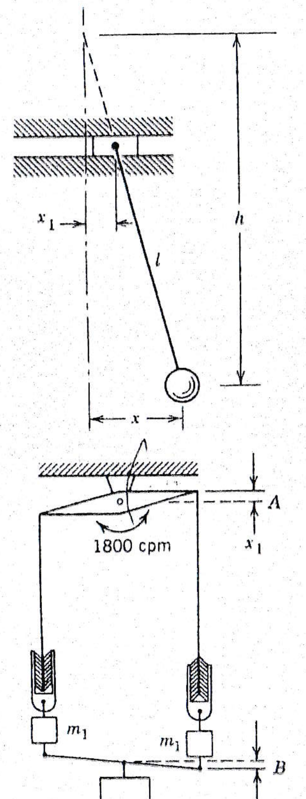
Respuesta: 3.2 mm

**PROBLEMA 4.17** ✓
Un equipo motor generador de 100 kg, está montado sobre cojines de hule que se defòrman 3 mm bajo el peso estático del mismo. La velocidad nominal del motor es de 1 800 rpm y a esta velocidad el equipo vibra con una amplitud de 0.05 mm. ¿Cuál sería la amplitud de movimiento del equipo motor generador si éste se montara sobre un bloque de concreto de 300 kg que a su vez se montara sobre los mismos cojines de hule?

Respuesta: 0.0116 mm

**PROBLEMA 4.18**
Determínese el error en la lectura de un acelerómetro si la frecuencia natural del mismo es cuatro veces la frecuencia del movimiento observado.

Respuesta: 6.7% arriba




**PROBLEMA 4.19**
El punto de soporte de un péndulo simple, recibe una oscilación armónica horizontal de $x_1 = X_1$ sen $\omega t$. Determínese una expresión para el movimiento del péndulo, suponiendo deflexiones pequeñas. Determínese la distancia de la masa al modo en términos de $\omega$ y $\omega_n$, usando las coordenadas $x$ y $x_1$.

Respuesta: $h = l\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right)$

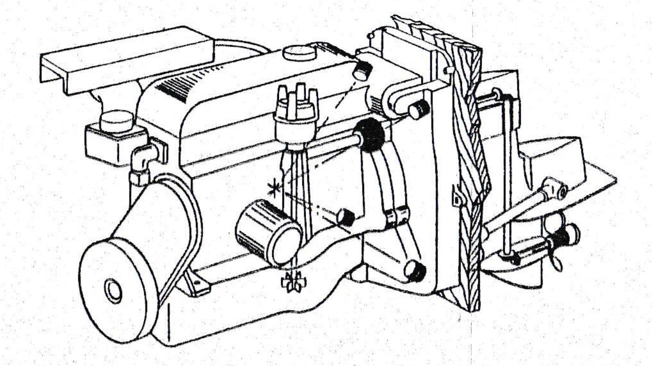
**PROBLEMA 4.20**
En la figura se muestra esquemáticamente una máquina proyectada para probar la adhesión entre hule y alambre. El alambre se sumerge en un compuesto de hule que se le adhiere y llena por completo el manguito cilíndrico. Para una doble amplitud de movimiento en el extremo $A$, de 2 mm, ¿cuál es el movimiento del extremo $B$? Cual es la fuerza máxima en el alambre, en $B$, que tiende a romper la adhesión del hule? Considérese a los alambres como rígidos y sin peso ($m_1$ = 5 kg, $m_2$ = 50 kg, $k$ = 175 N/mm).

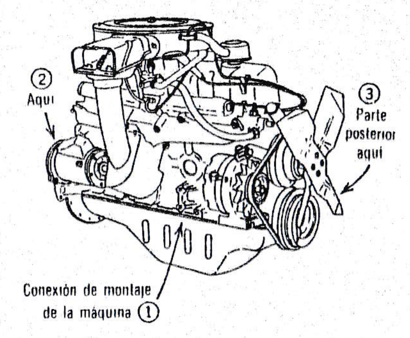
Respuesta: 1.11 mm, 488 N

**PROBLEMA 4.21**
Un sistema de suspensión para un motor marino intraborda, para impulso fuera de borda, consiste de cuatro aisladores de hule separados según los vértices de un rectángulo de 240 mm de ancho por 320 mm de alto. Cada aislador consiste de un accesorio de hule de tipo para corte, de 50 mm de diámetro y con una rigidez lineal de 300 N/mm, determinada por



una carga estática simple. La masa del motor es de 150 kg. El radio polar de giro del motor es de 175 mm. ¿Cuál es la relación de transmisión torsional (RT) a la velocidad nominal de 2 200 rpm? ¿Abajo de cuántas rpm será la RT mayor que 1? El motor tiene un ciclo de cuatro tiempos.






**PROBLEMA 4.22**
Los motores de automóvil se montan convencionalmente sobre tres aisladores, uno a cada lado del bloque del motor y otro en la parte posterior. Supóngase, por simplicidad, que el aislador posterior se encuentra sobre el eje del cigüeñal. Cada aislador tiene una rigidez lineal de 200 N/mm. Un motor de éstos tiene una masa de 125 kg y es de seis cilindros. El radio de giro para el mismo es de 150 mm.

(a) ¿Cuál es la relación de transmisión para movimiento vertical a una velocidad de operación de 2 200 rpm?
(b) ¿A qué distancia mínima a partir del eje del cigüeñal deben montarse los aisladores laterales para que la relación de transmisión en vibración torsional no sea mayor que para vibración vertical? El motor opera con ciclo de cuatro tiempos.

Respuesta: 0.0102; 184 mm

## 4.8 ANALISIS ARMONICO

Con frecuencia, una función forzante o movimiento perturbador, es periódico, pero no armónico simple. Un desequilibrio en una maquinaria rotativa, ocasiona casi siempre un movimiento armónico muy cercano a consistir en

una senoide pura, pero pueden existir muchas otras fuentes de vibración. Si el movimiento o función forzante es periódico, siempre podremos representar la función por una *Serie de Fourier* de las funciones de tiempo seno y coseno, cada una representativa de cierto múltiplo de la frecuencia fundamental. En un sistema lineal, cada armónica actúa entonces como si estuviera excitando por sí sola al sistema de masa y resorte, y la respuesta del sistema será la suma total de las excitaciones de todas las armónicas.

Una serie de Fourier se puede escribir

$$y(\omega t)=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos\omega t+A_2\cos 2\omega t+A_3\cos 3\omega t+\cdots+A_n\cos n\omega t+B_1\operatorname{sen}\omega t+B_2\operatorname{sen}2\omega t+B_3\operatorname{sen}3\omega t+\cdots+B_n\operatorname{sen}n\omega t \tag{4.14}$$

La función $y(\omega t)$ puede representar una fuerza o un desplazamiento si la excitación proviene del movimiento del piso. Si $y(\omega t)$ representa una fuerza, las amplitudes $\tfrac{1}{2}A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., $B_1$, $B_2$,... también representan fuerzas. Si $y(\omega t)$ es desplazamiento, las amplitudes representan desplazamientos. La frecuencia fundamental es $\omega$, la frecuencia a la cual la función forzante se repite a sí misma, y $A_1\cos\omega t + B_1\operatorname{sen}\omega t$ se conoce entonces como la función forzante fundamental. La frecuencia de la segunda armónica es $2\omega$ y $A_2\cos 2\omega t + B_2\operatorname{sen}2\omega t$ es la segunda armónica. La frecuencia de la tercera armónica es $3\omega$, y la tercera armónica es $A_3\cos 3\omega t + B_3\operatorname{sen}3\omega t$, y así sucesivamente.

Sin preocuparnos demasiado con los detalles del análisis de Fourier con los cuales los estudiantes están íntimamente familiarizados, los coeficientes arbitrarios $A_n$ y $B_n$, pueden encontrarse por integración, ya sea esta directa o numérica. Para el periodo de $\omega t = 0$ a $\omega t = 2\pi$,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(\omega t)\cos n\omega t\,d(\omega t) \tag{4.15}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(\omega t)\operatorname{sen}n\omega t\,d(\omega t) \tag{4.16}$$

La introducción del término $\tfrac{1}{2}A_0$ permite el uso de la ecuación para $A_n$ para todos los valores de los coeficientes $A_1$, $A_2$, $A_3$,... $A_n$ incluyendo a $A_0$. La magnitud $\tfrac{1}{2}A_0$ es nada menos que el valor promedio de $y(\omega t)$ a través de todo el periodo.

$$2\pi\left(\frac{A_0}{2}\right)=\int_0^{2\pi}y(\omega t)\,d(\omega t) \tag{4.17}$$

Con un análisis de Fourier sobre la función forzante, y conociendo la respuesta del sistema al forzamiento senoidal, se puede obtener la respuesta total de todas las armónicas, sumando las respuestas individuales para cada armónica. Para la respuesta del sistema, supongamos que la función forzante periódica $y(\omega t)$ se puede representar por la serie de Fourier y que se conocen todas las constantes arbitrarias.



$$y(\omega t)=\tfrac{1}{2}F_0+F_1\operatorname{sen}(\omega t+\alpha_1)+F_2\operatorname{sen}(2\omega t+\alpha_2)+\cdots+F_n\operatorname{sen}(n\omega t+\alpha_n) \tag{4.18}$$

Esta es una forma general de la serie de Fourier en la cual se utilizan una función trigonométrica y un ángulo de fase en lugar de ambos términos seno y coseno. $F_n$ y $\alpha_n$ son las constantes arbitrarias en lugar de $A_n$ y $B_n$. Aquí, $F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ y $\tan^{-1}\alpha_n = A_n/B_n$.

La respuesta de estado estable a la excitación $F_1\operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1)$ será

$$x_1=\frac{F_1}{k\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\operatorname{sen}(\omega t+\alpha_1)$$

y la respuesta de estado estable a la excitación $F_2\operatorname{sen}(2\omega t = \alpha_2)$ será, similarmente

$$x_2=\frac{F_2}{k\left(1-\dfrac{4\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\operatorname{sen}(2\omega t+\alpha_2)$$

Como expresión general, la respuesta de estado estable a la excitación $F_n\operatorname{sen}(n\omega t + \alpha_n)$ será

$$x_n=\frac{F_n}{k\left(1-\dfrac{n^2\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\operatorname{sen}(n\omega t+\alpha_n) \tag{4.19}$$

En este punto no se puede ignorar por más tiempo nuestro uso de $n$ en dos formas diferentes. No se confunda la armónica sen $n\omega t$ con la frecuencia natural $\omega_n$. Puede confundir el uso del símbolo $n$ en ambos casos, pero es ya convencional, y es mejor familiarizarse con la convención tal como es, que tratar de conjurar algo que no se volverá a ver. Por adición, la respuesta total del sistema de grado único de libertad será $x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$

o

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{k\left(1-\dfrac{n^2\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\operatorname{sen}(n\omega t+\alpha_n) \tag{4.20}$$

Es claro que la armónica que se aproxime más cercanamente a la frecuencia natural del sistema, influirá desproporcionadamente la respuesta de éste.

## 4.9 SOLUCIONES NUMERICAS PARA COEFICIENTES ARMONICOS

En la mayor parte de los casos es imposible la integración directa de una función periódica. Por cálculo manual, el análisis armónico es difícil y consume mucho tiempo, si se requiere obtener más de la tercera armónica. Con el advenimiento de las computadoras y el cálculo mecanizado, es bastante fácil determinar armónicas de orden más alto.

Haciendo referencia a la Fig. 4.7, la función periódica $y(\omega t)$ se repite después de un periodo de $\tau$. Este periodo se puede dividir arbitrariamente en $N$ partes iguales, $\tau/N = \Delta t$, y $\omega\tau/N = \Delta\omega\tau$. La frecuencia de la fundamental es $\omega_1 = 2\pi/\tau$. Reemplazando las integrales por $A_n$ y $B_n$ en las Ecs. 4.15 y 4.16 por las sumas finitas,

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\omega\tau}\sum_{i=1}^{N} y(\omega t_i)\cos\frac{2n\pi t_i}{\tau}\,\Delta(\omega t)\\
&= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y(\omega t_i)\cos\frac{2n\pi t_i}{\tau}\\
B_n &= \frac{2}{\omega\tau}\sum_{i=1}^{N} y(\omega t_i)\operatorname{sen}\frac{2n\pi t_i}{\tau}\,\Delta(\omega t)\\
&= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y(\omega t_i)\operatorname{sen}\frac{2n\pi t_i}{\tau}
\end{aligned}
\qquad (4.21)
$$

El subíndice $i$ denota el $i$-ésimo intervalo, $y_i$ es el valor de la función $y(\omega t_i)$ en el $i$-ésimo intervalo. El ángulo $2\pi t_i/\tau$ es la fracción de círculo que representa la fracción $t_i/\tau$ para $n = 1$. Para armónicas más altas, habrá $n$ múltiplos de

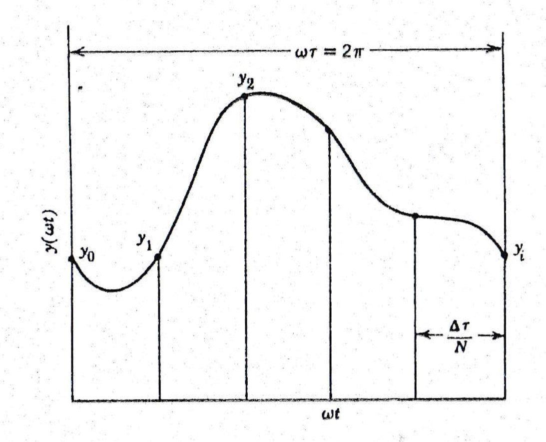



Fig. 4.7



$2\pi$ radianes. Al calcular los coeficientes de las armónicas más altas, deberá recordarse que el subíndice $n$ indica la $n$-ésima armónica, en tanto que $N$, es el número de intervalos iguales en los que se ha dividido el periodo $\tau$. Al calcular los coeficientes de Fourier numéricamente, no es necesario encontrarlos sucesivamente. Esto es, se puede encontrar el valor de la $n$-ésima armónica independientemente de los de las otras armónicas.

También es posible usar una serie truncada específica para representar $F(\omega t)$.

Como un ejemplo

$$
\begin{aligned}
y(\omega t) = {}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t + A_3\cos 3\omega t\\
&+ B_1\operatorname{sen}\omega t + B_2\operatorname{sen} 2\omega t
\end{aligned}
\qquad (4.22)
$$

Esta serie usa seis términos. Si usamos el valor de $y(\omega t)$ en seis puntos, podemos resolver para $\tfrac{1}{2}A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$ y $B_2$ resolviendo simultáneamente seis ecuaciones. Se usan seis puntos porque los ángulos que aparecen en los términos seno y coseno serán así múltiplos de $\pi/3$. Los términos trigonométricos serán $\pm 1$, $\pm\sqrt{3/2}$, $\pm\tfrac{1}{2}$ o cero.

No es necesario decir que éste es un cálculo tedioso, pero los métodos matriciales simplifican la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas.

$$
\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}}\\
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0\\
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}}\\
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ B_1\\ B_2 \end{bmatrix}
$$

Invirtiendo la matriz, podemos encontrar directamente cada término.

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ B_1\\ B_2 \end{bmatrix}
= \frac{1}{6}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1\\
2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\
0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}
= \frac{1}{12}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & \sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -2 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\
2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\
2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -2 & -\sqrt{3} & -1 \\
0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\
0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\
0 & 1 & -\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \end{bmatrix}
$$



Se pueden formar matrices similares para cualquier número de ecuaciones, pero es conveniente usar submúltiplos de $2\pi$, que se repiten, tales como $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$, $\pi/24$. Esto requiere 6, 12, 24 y 48 intervalos y un número de ecuaciones semejantes. Con seis intervalos y seis ecuaciones, se pueden encontrar los coeficientes de las primeras tres armónicas. Con 12 intervalos, se pueden encontrar las primeras seis armónicas. Se incluye una matriz de 12 intervalos. Numéricamente, un mayor número de intervalos proporcionará mayor precisión.

Estos dispositivos no tienen ventajas o desventajas sobre una serie convencional de Fourier, pero fuerzan a una serie truncada a pasar a través de un conjunto de puntos de información específico. Lo anterior puede o no ser importante. Por ejemplo, puede haber uno o más puntos por los que la serie debe pasar exactamente. Resolviendo para el conjunto de coeficientes por el uso de ecuaciones simultáneas, se podrá hacer esto al costo de cierta imprecisión en alguna parte. Estas son sólo diferentes maneras de encontrar armónicas numéricamente.

## 4.10 TRABAJO POR CICLO

Si la energía que se aporta a un sistema mecánico vibratorio excede de la que se disipa por alguna forma de amortiguación, aumenta la amplitud de vibración. Es importante en este estado de nuestro estudio de la vibración, considerar el trabajo aportado a un sistema vibratorio por una fuerza armónica. El trabajo se define como el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento en la dirección de la fuerza

$$dU = F(t) \cdot dx \tag{4.23}$$

Para el periodo $\omega t = 0$ a $\omega t = 2\pi$, el trabajo por ciclo es

$$\Delta U = \int_0^{2\pi/\omega} F(t)\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_0^{2\pi} F(\omega t)\frac{\dot{x}}{\omega}\, d(\omega t) \tag{4.24}$$

Ahora, si suponemos que la fuerza $(\omega t)$ es una armónica de orden $n$, $F(\omega t) = F_n$ sen $(n\omega t + \alpha_n)$ y el desplazamiento es armónico simple con una frecuencia $\omega$, $x = X$ sen $\omega t$, se puede encontrar el trabajo por ciclo integrando

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= F_n X \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n\omega t + \alpha_n)\cos \omega t\, d(\omega t) \\
&= \pi F_1 X \operatorname{sen} \alpha_1, \quad \text{for} \quad n = 1 \\
&= 0, \quad \text{for} \quad n \neq 1
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Recuérdese que $n$ según se usa en $n\omega t$, es un entero que es el orden de la armónica. El valor de la integral es cero, excepto cuando $n = 1$. Esto simplemente

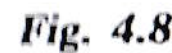
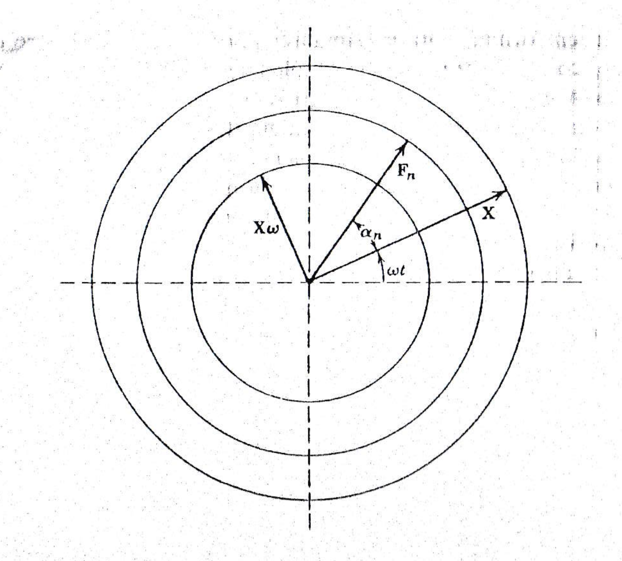


Fig. 4.8



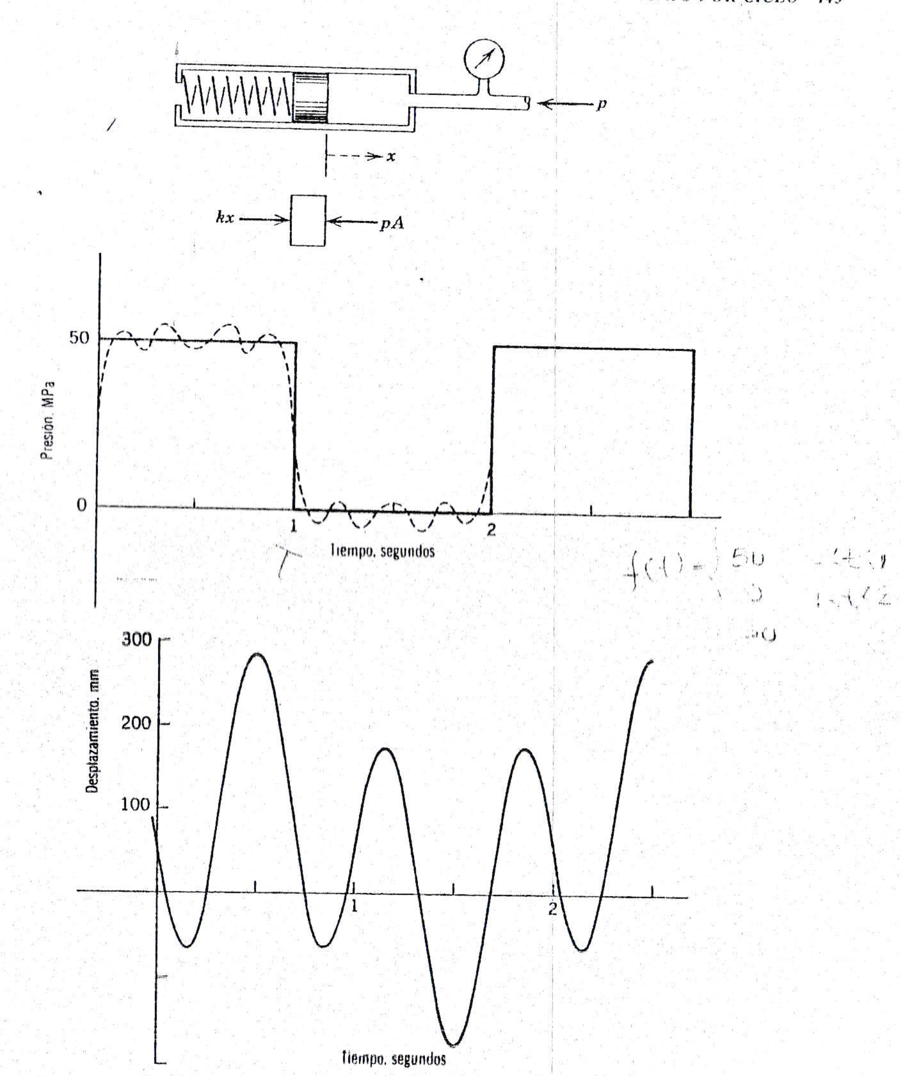

significa que la fuerza armónica $F(\omega t)$ y el desplazamiento $x(\omega t)$, debe ser de la misma frecuencia, $\omega$ para que se añada energía al sistema. El trabajo realizado por una fuerza armónica, a través de un ciclo completo, es función del desplazamiento máximo, la fuerza máxima y el ángulo de fase entre la función forzante y el desplazamiento. Haciendo referencia al diagrama vectorial de la Fig. 4.8, $F_n$ sen $\alpha_n$ es la componente del vector fuerza rotativo en la dirección del vector velocidad. Es una conclusión natural que la fuerza debe encontrarse en fase con la velocidad de la misma frecuencia, para realizar trabajo sobre el sistema.

Esto no significa que $\omega$ sea necesariamente la fundamental. Podría ser cualquiera de las armónicas. Si se hubiera comenzado con $F(\omega t) = F_n$ sen $(n\omega t + \alpha_n)$ y $x = X$ sen $2\omega t$, no podría haberse añadido energía al sistema, a menos que $n = 2$. Si la fuerza armónica y el desplazamiento o la velocidad son de frecuencias diferentes, no se realiza trabajo sobre la función forzante a través de un número entero de ciclos.

## PROBLEMA EJEMPLO 4.23

Se coloca un deslizador de 3.68 g dentro de un tubo liso con diámetro interior de 40 mm. El resorte tiene una rigidez de 284 N/m. Un lado del tubo está abierto a la atmósfera. La presión en el otro lado varía periódicamente, como se muestra en la gráfica. Determínese la respuesta del deslizador.






*Solución:*

La función forzante $p(\omega t)$ se puede expresar en una serie de Fourier

$$p(\omega t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$+ B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \cdots$$

para un periodo de $\tau = 2$ s, $\omega\tau = 2\pi$, y $\omega = \pi$ s$^{-1}$. Resolviendo para las amplitudes $A_0$, $A_1$, $A_2$,...

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} PA\, d(\omega t) = PA$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\cos \omega t\, d(\omega t) = \frac{1}{\pi}[PA \text{ sen}\,\omega t]_0^{2\pi} = 0$$

Similarmente $A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0$. $A$ sin subíndice es el área frontal del péndulo.

Es evidente que no existen en la serie términos coseno. Esto refleja nuestro segundo pensamiento, ya que la función $p(\omega t)$ es impar.

Resolviendo para las amplitudes $B_1$, $B_2$, $B_3$,...

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\text{sen}(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{PA}{\pi}[-\cos \omega t]_0^{\pi} = 2\frac{PA}{\pi}$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\text{sen}\, 2\omega t\, d(\omega t) = \frac{PA}{2\pi}[-\cos 2\omega t]_0^{\pi} = 0$$

$$B_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\text{sen}\, 3\omega t\, d(\omega t) = \frac{PA}{3\pi}[-\cos 3\omega t]_0^{\pi} = 2\frac{PA}{3\pi}$$

$$B_n = \frac{2PA}{n\pi}, \quad \text{para } n \text{ nones,}$$

$$B_n = 0, \quad \text{para } n \text{ pares.}$$

La gráfica $p(\omega t)$ se puede expresar por la serie

$$p(\omega t) = \frac{PA}{2} + 2\frac{PA}{\pi}\text{sen}\,\omega t + \frac{2}{3}\frac{PA}{\pi}\text{sen}\,3\omega t + \frac{2}{5}\frac{PA}{\pi}\text{sen}\,5\omega t + \cdots$$

Una graficación de la serie muestra qué tan cercanamente se aproximan estos términos a la onda cuadrada.

La frecuencia natural del sistema resorte y masa es

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{284}{3.68} = 77.2 \text{ s}^{-2}$$

Para la respuesta al término estático,

$$X_0 = \frac{PA}{2k} = \frac{50\,000}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{(0.04)^2}{284} = 0.1106 \text{ m}$$



Para la respuesta a la primera armónica,

$$X_1 = 2\frac{PA}{\pi k}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(50\,000)\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{(0.04)^2}{284}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\pi^2}{77.2}\right)}\right] = 0.1612 \text{ m}$$

Para la respuesta a la tercera armónica,

$$X_3 = \frac{2}{3}\frac{PA}{\pi k}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{9\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{2(50\,000)}{3\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{(0.04)^2}{284}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{9\pi^2}{77.2}\right)}\right] = -0.310 \text{ m}$$

Y la quinta armónica

$$X_5 = \frac{2}{5}\frac{PA}{\pi k}\frac{1}{\left(1 - \frac{25\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$= \frac{2(50\,000)}{5\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{(0.04)^2}{284}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{25\pi^2}{77.2}\right)}\right] = -0.0128 \text{ m}$$

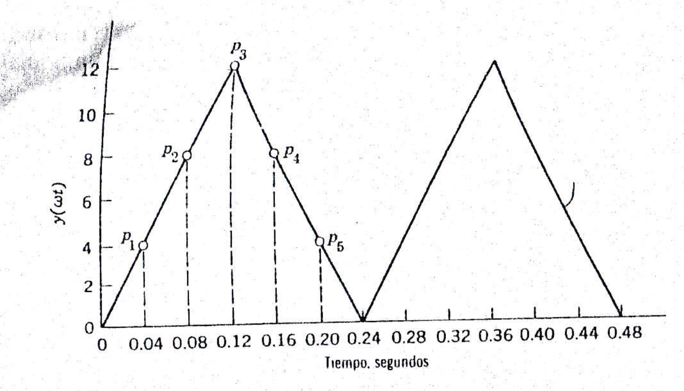
La tercera armónica es muy grande, ya que la frecuencia natural está más cercana a ésta que lo que ésta está de la fundamental o cualquiera otra armónica. En la gráfica se muestra la respuesta.

***PROBLEMA EJEMPLO 4.24***

Determínense las primeras tres armónicas de la onda triangular que tiene un periodo de 0.24 s, usando métodos numéricos para determinar una expansión de Fourier.

***Solución:***

La frecuencia circular de la fundamental es $2\pi$ radianes cada 0.24 s, es decir, $\omega = 26.2$ s$^{-1}$. Dividiendo la onda en seis intervalos, cada intervalo será de 0.04 s, o $\pi/3$ radianes del periodo completo.




El valor promedio de la función $p(t)$ será la suma de todos los seis valores de $p_1, p_2, p_3, \ldots p_6$, dividida entre 6, o

$$A_0 = \frac{2}{6} \sum_{i=1}^{6} p_i = 12$$

$$\tfrac{1}{2} A_0 = 6,$$

que es el valor promedio. Los otros coeficientes se pueden encontrar por las Ecs. 4.24

$$A_n = \frac{2}{6} \sum_{i=1}^{6} p_i \cos \frac{2n\pi t_i}{\tau}$$

$$B_n = \frac{2}{6} \sum_{i=1}^{6} p_i \operatorname{sen} \frac{2n\pi t_i}{\tau}$$

Haciendo una tabla para el cálculo tabular de la fundamental $A_1 \cos \omega t + B_1$ sen $\omega t$, $n = 1$,

| $i$ | $p_i$ | $\cos \frac{2\pi t_i}{\tau}$ | $\operatorname{sen} \frac{2\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \cos \frac{2\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \operatorname{sen} \frac{2\pi t_i}{\tau}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0.50 | 0.866 | 2 | 3.464 |
| 2 | 8 | −0.50 | 0.866 | −4 | 6.928 |
| 3 | 12 | −1.00 | 0.000 | −12 | 0.0000 |
| 4 | 8 | −0.50 | −0.866 | −4 | −6.928 |
| 5 | 4 | 0.50 | −0.866 | 2 | −3.464 |
| 6 | 0 | 1.00 | 0.000 | 0 | 0.000 |
| | | | | $\Sigma = -16$ | $\Sigma = 0$ |

$$A_1 = \frac{2}{6} \sum_{i=1}^{6} p_i \cos \frac{2\pi t_i}{\tau} = \frac{-16}{3} = -5.333$$

$$B_1 = 0$$



Haciendo el cálculo tabular de la segunda armónica $A_2 \cos 2\omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t$, $n = 2$;

| $i$ | $p_i$ | $\cos \frac{4\pi t_i}{\tau}$ | $\operatorname{sen} \frac{4\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \cos \frac{4\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \operatorname{sen} \frac{4\pi t_i}{\tau}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | −0.50 | 0.866 | −2 | 3.464 |
| 2 | 8 | −0.50 | −0.866 | −4 | −6.928 |
| 3 | 12 | 1.00 | 0.000 | 12 | 0.000 |
| 4 | 8 | −0.50 | 0.866 | −4 | 6.928 |
| 5 | 4 | −0.50 | −0.866 | −2 | −3.464 |
| 6 | 0 | 1.00 | 0.000 | 0 | 0.000 |
| | | | | $\Sigma = 0$ | $\Sigma = 0$ |

$$A_2 = 0$$

$$B_2 = 0$$

Y, en la tercera armónica $A_3 \cos 3\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t$, $n = 3$;

| $i$ | $p_i$ | $\cos \frac{6\pi t_i}{\tau}$ | $\operatorname{sen} \frac{6\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \cos \frac{6\pi t_i}{\tau}$ | $p_i \operatorname{sen} \frac{6\pi t_i}{\tau}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | −1 | 0 | −4 | 0 |
| 2 | 8 | 1 | 0 | +8 | 0 |
| 3 | 12 | −1 | 0 | −12 | 0 |
| 4 | 8 | 1 | 0 | 8 | 0 |
| 5 | 4 | −1 | 0 | −4 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | $\Sigma = -4$ | $\Sigma = 0$ |

$$A_3 = \frac{2}{6} \sum_{i=1}^{6} p_i \cos \frac{6\pi t_i}{\tau} = \frac{-4}{3} = -1.333$$

$$B_3 = 0$$

La expresión aproximada es, por tanto,

$$p(t) = 6 - 5.333 \cos 26.2t - 1.333 \cos 78.5t$$

Si se usa un gran número de intervalos, la expansión de Fourier será una función más precisa de la función y se determinarán armónicas más altas. Como ejemplo, usando 24 intervalos, cada intervalo será de 0.01 s o $\pi/2$ radianes para un periodo completo.

Haciendo lo mismo para las armónicas segunda y tercera, una expresión

aproximada, usando 24 intervalos, es

$$p(t) = 6 - 4.891 \cos 26.2t - 0.5691 \cos 78.5t$$

la expresión exacta es

$$p(t) = 6 - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi t_i}{0.12}$$
$$= 6 - 4.05 \cos 26.2t - 0.45 \cos 78.5t$$

Ya que $p(t)$ se puede expresar como función continua del tiempo y las expresiones para los coeficientes de Fourier son integrables.

Pudo haberse predicho la ausencia de términos seno, ya que la forma de onda es una función par, esto es $p(t)$ es simétrica alrededor del origen.

**PROBLEMA 4.25**

Repítase el Prob. Ej. 4.24, formando la función de modo que pase a través de seis puntos, comenzando con $y_0 = 0$ en $t = 0$.

**PROBLEMA 4.26**

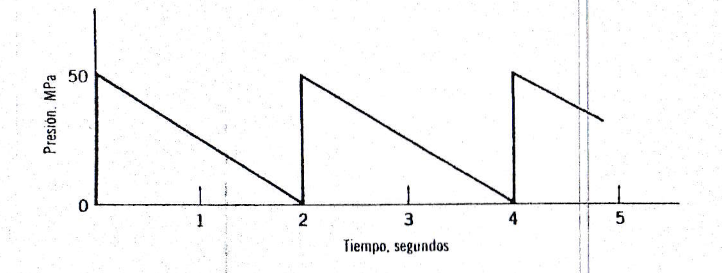
Repítase el Prob. Ej. 4.24 usando doce puntos, comenzando con $y_0 = 0$ en $t = 0$.

**PROBLEMA 4.27**

Repítase el Prob. Ej. 4.24, usando 24 intervalos, y determínese una expresión que incluya las armónicas primera, segunda y tercera.

**PROBLEMA 4.28**

Determínese la respuesta del deslizador del Prob. Ej. 4.23, si la presión varía periódicamente como se indica a continuación. Grafíquese la respuesta.

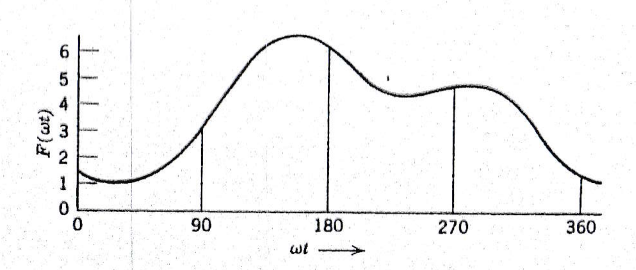





**PROBLEMA 4.29**

Hágase un análisis armónico, que incluya las primeras tres armónicas, de la función forzante mostrada.

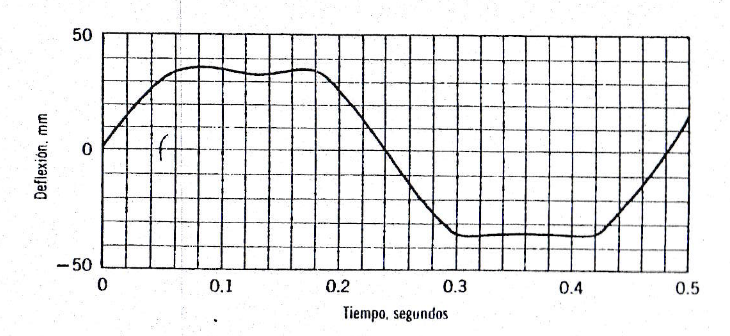
| $\omega t$ | $F(\omega t)$ | $\omega t$ | $F(\omega t)$ | $\omega t$ | $F(\omega t)$ | $\omega t$ | $F(\omega t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15° | 1.15 | 105° | 4.35 | 195° | 5.60 | 285° | 4.80 |
| 30 | 1.10 | 120 | 5.50 | 210 | 4.80 | 300 | 4.60 |
| 45 | 1.20 | 135 | 6.25 | 225 | 4.40 | 315 | 4.00 |
| 60 | 1.55 | 150 | 6.65 | 240 | 4.40 | 330 | 3.10 |
| 75 | 2.20 | 165 | 6.65 | 255 | 4.60 | 345 | 2.15 |
| 90 | 3.20 | 180 | 6.35 | 270 | 4.75 | 360 | 1.50 |




**PROBLEMA 4.30**

Hágase un análisis armónico de la forma de onda mostrada en la gráfica que sigue.

Respuesta: $y = 40.0 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{0.24} + 6.0 \operatorname{sen} \frac{3\pi t}{0.24}$



**PROBLEMA 4.31**

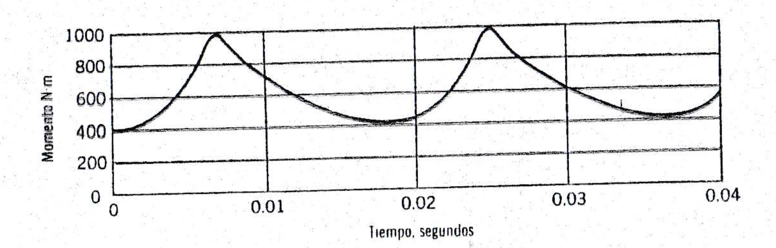
En la tabla se muestra la variación de presión a través del tiempo, en una línea hidráulica. Los datos se obtuvieron directamente de la presión registrada a intervalos de 0.01 s. ¿Cuál es la frecuencia de la fundamental? Usando análisis armónico, determínese una expansión de Fourier que exprese la información.

| *Tiempo, s* | *Presión, N/m²* | *Tiempo, s* | *Presión, N/m²* | *Tiempo, s* | *Presión, N/m²* | *Tiempo, s* | *Presión, N/m²* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 2.9 | 0.07 | 28.7 | 0.13 | 54.3 | 0.19 | 28.6 |
| 0.02 | 10.4 | 0.08 | 31.5 | 0.14 | 46.8 | 0.20 | 25.7 |
| 0.03 | 19.2 | 0.09 | 38.0 | 0.15 | 38.0 | 0.21 | 19.2 |
| 0.04 | 25.7 | 0.10 | 46.8 | 0.16 | 31.5 | 0.22 | 10.4 |
| 0.05 | 28.6 | 0.11 | 54.3 | 0.17 | 28.7 | 0.23 | 2.9 |
| 0.06 | 28.6 | 0.12 | 57.2 | 0.18 | 28.6 | 0.24 | 0 |

**PROBLEMA 4.32**

En la tabla que sigue, se describe el esfuerzo de volteo de un motor típico de gasolina, de seis cilindros y cuatro tiempos y se muestra en el diagrama par de torsión-tiempo incluido. Hágase un análisis armónico del esfuerzo de volteo. Encuéntrese la amplitud de por lo menos las primeras tres armónicas.

| *Tiempo, s* | *Momento, N · m* | *Tiempo, s* | *Momento, N · m* | *Tiempo, s* | *Momento, N · m* | *Tiempo, s* | *Momento, N · m* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00075 | 410 | 0.00525 | 740 | 0.00975 | 750 | 0.01425 | 500 |
| 0.00150 | 420 | 0.00600 | 860 | 0.01050 | 700 | 0.01500 | 470 |
| 0.00225 | 440 | 0.00675 | 980 | 0.01125 | 650 | 0.01575 | 440 |
| 0.00300 | 480 | 0.00750 | 920 | 0.01200 | 600 | 0.01650 | 420 |
| 0.00375 | 540 | 0.00825 | 860 | 0.01275 | 560 | 0.01725 | 410 |
| 0.00450 | 640 | 0.00900 | 800 | 0.01350 | 530 | 0.01800 | 400 |

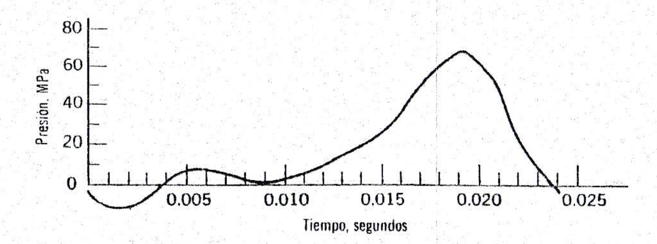





**PROBLEMA 4.33**

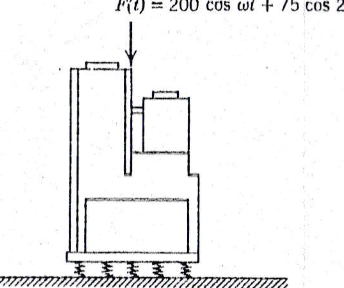
La presión de velocidad de la boquilla de salida de un ariete de chorro, que es una medida del empuje, varía como se muestra, en función del tiempo. Hágase el análisis armónico de la presión como función del tiempo. Inclúyanse las primeras tres armónicas. Compruébese el valor máximo de la primera armónica con el máximo de la curva.

| *Tiempo, s* | *Presión, MPa* | *Tiempo, s* | *Presión, MPa* | *Tiempo, s* | *Presión, MPa* | *Tiempo, s* | *Presión, MPa* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.001 | −12.5 | 0.007 | 5.0 | 0.013 | 15.0 | 0.019 | 70.0 |
| 0.002 | −12.5 | 0.008 | 2.5 | 0.014 | 20.0 | 0.020 | 65.0 |
| 0.003 | −7.5 | 0.009 | 0 | 0.015 | 25.0 | 0.021 | 50.0 |
| 0.004 | 0 | 0.010 | 2.5 | 0.016 | 35.0 | 0.022 | 25.0 |
| 0.005 | 5.0 | 0.011 | 5.0 | 0.017 | 50.0 | 0.023 | 10.0 |
| 0.006 | 7.5 | 0.012 | 10.0 | 0.018 | 60.0 | 0.024 | −2.5 |




**PROBLEMA 4.34**

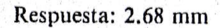
Un cepillo mecánico vertical de 200 kg, se coloca sobre cojines de hule que se deforman 2 mm bajo el peso del mismo. El cepillo tiene una velocidad de corte máxima de 225 ciclos por minuto. Determínese el



movimiento vertical del cepillo, si la fuerza de sacudimiento vertical es de 200 cos $\omega t$ + 75 cos $\omega t$, expresada en newtons. La segunda armónica fuerte se origina por el mecanismo de retroceso rápido del cepillo.

**PROBLEMA 4.35**

Un motor de combustión interna, de alta velocidad, tiene una barreno de 92 mm y una carrera de 100 mm. El perno de émbolo está colocado lateralmente dentro del cuerpo del émbolo. Un extremo de la biela de 200 mm está montado en el perno y el otro lo está en el cigüeñal. El conjunto de émbolo es bastante rígido y se considera ordinariamente como una masa única. Si se considera al perno de émbolo como un resorte dispuesto entre el émbolo y la biela, la frecuencia natural de este sistema es de 300 ciclos/s. Determínese el desplazamiento máximo del émbolo con relación a la biela, para una velocidad de operación de 3 600 rpm.



Respuesta: 2.68 mm

**PROBLEMA 4.36**

Una punzonadora de 1 000 kg opera a 86 rpm y se sabe que transmite una fuerza hacia la cimentación, que se puede expresar como

$$F(t) = 25 + 20 \text{ sen } 9t - 3 \text{ sen } 18t - 2 \text{ sen } 27t$$

en donde $t$ está en segundos. La prensa puede montarse sobre un cojín de corcho y hule con deformación nominal de 2 mm, o sobre aisladores comerciales que se deforman de 20 mm a 100 mm bajo carga, dependiendo del aislador seleccionado. Si éstas se consideran como tres selecciones representativas, ¿cuál de ellas se preferiría, y por qué?

Respuesta: Cojín de corcho y hule

**PROBLEMA 4.37**

Una máquina textil autocontenida, con masa de 5 000 kg, debe ser aislada contra la transmisión de fuerza hacia la cimentación. La función forzante se puede expresar como

$$F(t) = 100 \text{ sen } \omega t + 5 \text{ sen } 2\omega t$$

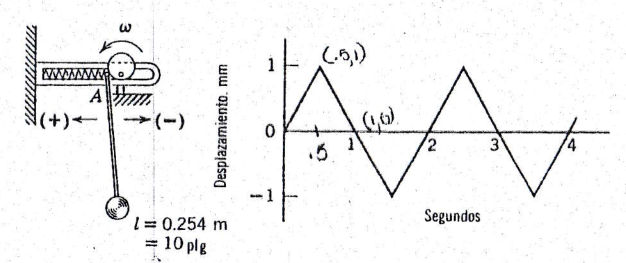


y la frecuencia de la fundamental es 1 200 rpm. Los aisladores de vibración se calibran por la deflexión estática, estando los aisladores bajo carga; y se producen en calibraciones de 4, 6 y 8 mm. ¿Cuáles de éstos reducirán la transmisión de fuerza por abajo del 10%?

**PROBLEMA 4.38** ✓

Determínese la respuesta $x$, de un péndulo simple a la leva, la que se mueve a una velocidad angular constante. El movimiento del punto $A$ se grafica como se muestra. El resorte es lo bastante rígido para mantener el contacto entre la leva y el cursor en todo momento.

Respuesta: $x = 1.09$ sen $\omega t + 0.0694$ sen $3\omega t = 0.006$ sen $5\omega t$

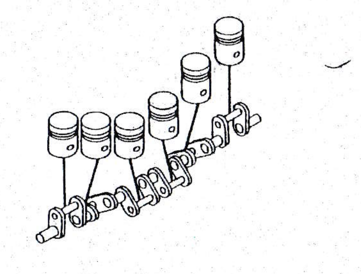


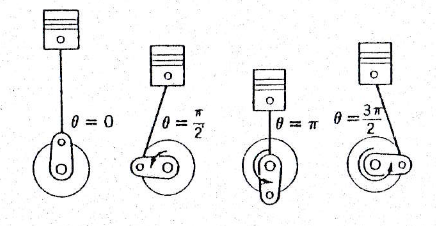

## 4.11 VIBRACION FORZADA DE UN SISTEMA NO LINEAL

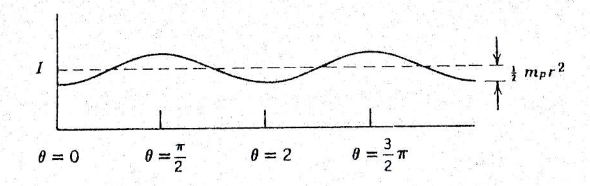
En las secciones precedentes sólo hemos tratado sistemas lineales, los que, si son considerados con amplitudes pequeñas de movimiento, constituyen modelos satisfactorios de los problemas reales. Cualquiera de los elementos resorte, masa o mecanismo de amortiguación, puede ser no lineal. De hecho, los sistemas reales son con mayor frecuencia no lineales que lineales.

Primero, la masa puede ser no lineal, pero en la ingeniería mecánica existen pocos problemas en los cuales no se pueda suponer que la masa del sistema es constante, para los propósitos de ingeniería. Una excepción significante la constituye un motor o una compresora reciprocantes. En la Fig. 4.9, la inercia del émbolo que se mueve ascendiendo y descendiendo dentro del cilindro, se suma al momento de inercia de la manivela y cigüeñal en rotación cuando el ángulo $\theta$ de la manivela se encuentra en un valor que es casi un ángulo recto con respecto al eje de recorrido del émbolo. El ángulo real depende de la longitud de la biela y del lanzamiento de la manivela. A ángulos de ma-

**Fig. 4.9**






nivela de $\theta = 0°$ y $\theta = \pi$, el émbolo pasa por los puntos muertos superior e inferior, respectivamente, y la inercia de éste no se suma a la inercia de rotación. Así, la inercia de un motor reciprocante, varía con el desplazamiento de la manivela, alcanzando un máximo y un mínimo en cada revolución del cigüeñal. Para la inercia efectiva de rotación $I_e$, el momento de inercia del cigüeñal $I_C$, la masa reciprocante $m_r$, y el lanzamiento $r$ de la manivela, y el ángulo $\theta$

$$I_e = I_C + \tfrac{1}{2}m_p r^2 - \tfrac{1}{2}m_p r^2 \cos 2\theta$$

Como se ha establecido, esto es aproximado.

Para motores multicilíndricos, la inercia reciprocante de un cilindro se equilibra por la inercia de otro. Esta es una de las razones por las cuales los motores en línea, tienen manivelas desplazadas en el cigüeñal. Como resultado, en los motores multicilíndricos se ignora también la variación del momento de inercia de masa con el tiempo. El momento de inercia de masa equivalente, se calcula simplemente para ser

$$I_e = I_c + \tfrac{1}{2}m_p r^2 \tag{4.26}$$



Segundo, de las tres formas de amortiguación más prevalentes, dos son no lineales. En el Cap. 6 se estudia todo el tema de la amortiguación, tanto lineal como no lineal.

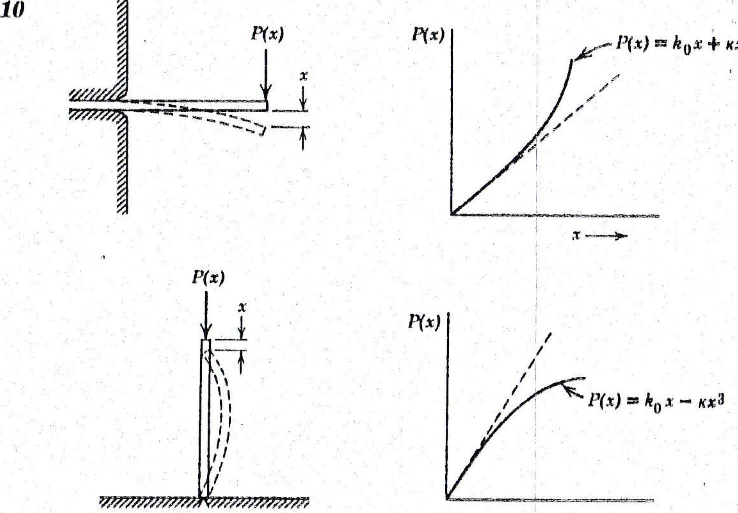
Con mucho, el caso más común de no linealidad en la vibración mecánica, es el del elemento elástico. En una estructura empotrada, la constante efectiva de resorte, aumenta con el desplazamiento. Puede ser imaginada una estructura rigidizándose al reducirse los claros dentro de ésta. Para pequeños desplazamientos, la estructura es flexible, pero para desplazamientos más grandes, es también muy posible tener una situación en la que la constante efectiva de resorte disminuya con el desplazamiento. El módulo de la mayor parte de los materiales de ingeniería, disminuye al aumentar la deformación. En ciertos casos, la disminución de la habilidad de portación de carga por la deformación aumentada es tan pronunciada, que se supone que el mecanismo de deformación es plástico. El pandeo puede también disminuir considerablemente la habilidad de portación de carga de cualquier elemento o estructura. Se puede crear un resorte rigidizante o ablandante, por diseño o por accidente. La Fig. 4.10 muestra dos casos de elasticidad no lineal, una que aumenta con el desplazamiento y la otra que disminuye.

El término $P(x)$ se usa para denotar una fuerza elástica no lineal. Se pueden usar varias funciones para $P(x)$, pero una de las más simples es la polinomial

$$P(x) = k_0 x + \kappa x^3 \tag{4.27}$$

que se muestra en la Fig. 4.10. Podrían usarse términos adicionales, pero el término cúbico da una solución aproximada que por lo general es satisfacto-

**Fig. 4.10**



ria. Por simetría, sólo deben usarse potencias impares de $x$. (Si se usan potencias pares, por ejemplo, $P(x) = k_0x + kx^2$, la fuerza $P(x)$ puede rigidizar con $x$ positiva, y ablandar con $x$ negativa, lo que sería subnormal.) $k_0$ es la constante elástica inicial, cuyas unidades son kg/cm. Las unidades de $k$ son kg/cm³.

La vibración forzada de un sistema que contiene un resorte no lineal, presenta varias características singulares que son importantes en un estudio elemental de la vibración mecánica. La eucación de movimiento para la vibración forzada es, $\Sigma F = m\ddot{x}$, o

$$m\ddot{x} + P(x) = F(t) \tag{4.28}$$

Sustituyendo la expresión cúbica en la ecuación de movimiento, tenemos

$$m\ddot{x} + k_0x + \kappa x^3 = F(t) \tag{4.29}$$

Excitemos ahora este sistema no lineal con la función forzante armónica simple $F(t) = F_1 \operatorname{sen} \omega t$. El resultado es una ecuación diferencial no lineal,

$$m\ddot{x} + k_0x + \kappa x^3 = F_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{4.30}$$

Esta ecuación ha sido objeto de mucho estudio en la mecánica no lineal. Con frecuencia se hace referencia a la misma como de la ecuación de Duffing, en memoria de G. Duffing, quien fue el primero en presentar y estudiar el problema. No se conoce la solución general de la misma.

Se puede encontrar una aproximación a la respuesta de este problema simple, suponiendo que el desplazamiento es armónico simple. Este sería el movimiento real si $\kappa = 0$. Supongamos que $P(x)$ es casi lineal y que el movimiento resultante está lo bastante cercano a ser armónico simple, como para permitir

$$x = X \operatorname{sen} \omega t$$

Esta suposición satisface la ecuación de movimiento en $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, .. n\pi$, ya que el desplazamiento y la función forzante son idénticamente iguales a cero en estos tiempos. No obstante, no satisface la ecuación de movimiento en ningún otro tiempo, y no puede existir una solución exacta. Podemos determinar el valor del desplazamiento $X$, lo que hará que la solución de prueba satisfaga además la ecuación de movimiento en $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots[(2n + 1)/2]\ \pi$, igualando la magnitud de los vectores amplitud en cada lado de la Ec. 4.30, ya que

$$\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \pi = 1 \quad \text{para} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$-m\omega^2 X + k_0 X + \kappa X^3 = F_1 \tag{4.31}$$



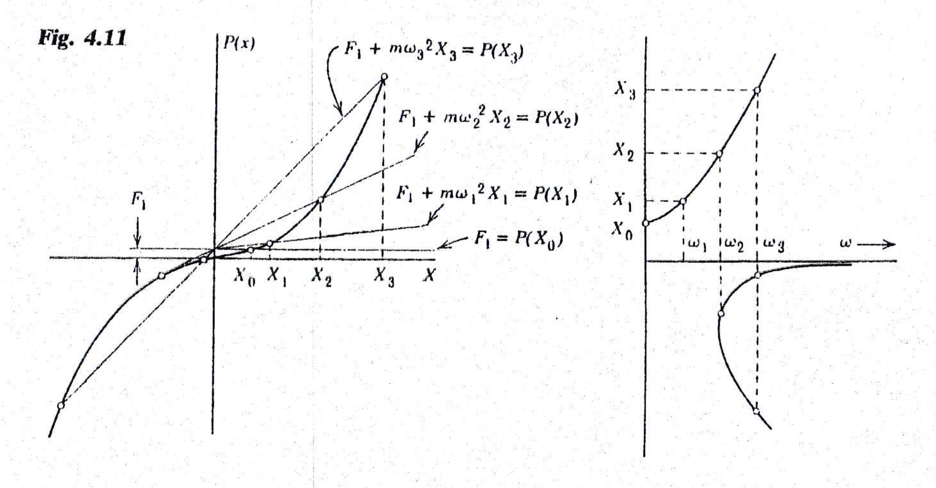


Fig. 4.11

Redisponiendo términos,

$$F_1 + m\omega^2 X = k_0 X + \kappa X^3 = P(x)$$

Gráficamente, estas dos ecuaciones se satisfacen mutuamente en donde se intersectan. Si la elasticidad es lineal, habrá una sola intersección, pero si no es lineal puede ser posible más de una intersección. En la Fig. 4.11, se grafica cada amplitud $X$ como función de la frecuencia, $\omega$. En $\omega = 0$, la amplitud es $X_0$. Si $\omega = \omega_1$, la amplitud aumenta hasta $X_1$, en donde $F_1 + m\omega_1^2X_1 = k_0K_1 + {}_\kappa X_1^3$. En la frecuencia $\omega = \omega_2$, habrá dos amplitudes que satisfagan la igualdad $F_1 + m\omega_2^2X_2 = k_0X_2 + xX_2^3$, una en la amplitud negativa en donde las dos curvas son tangentes. Para $\omega = \omega_3$, y en cualesquiera frecuencias más altas, habrá tres amplitudes, dos negativas y una positiva. El resultado es una curva de respuesta, distorsionada, que es típica de la vibración forzada no lineal. La curva tiene dos ramas, una en donde la fuerza excitante y la amplitud tienen el mismo signo y una en donde tienen signos opuestos. Compárese esta curva con la Fig. 4.2.

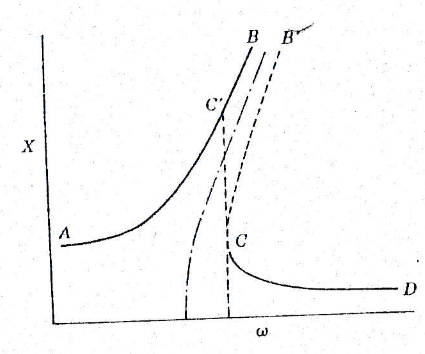
La razón de esta distorsión es que la frecuencia natural del sistema no lineal, es por sí misma una función del desplazamiento. Esto es contrario al caso de la vibración lineal. Si definimos la frecuencia $\omega_n$ como la frecuencia natural del sistema para la amplitud cero $X$ y llamamos $\omega_n'$ a la frecuencia natural que es dependiente de la amplitud,

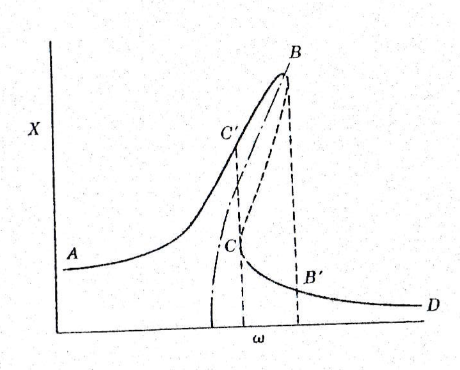
$$\omega_n' = \omega_n \sqrt{1 \pm \tfrac{3}{4}\kappa^2 X^2} \tag{4.32}$$

Se usa el $\pm$ para designar un resorte rigidizante o reblandeciente.

La curva distorsionada de respuesta tiene un efecto muy pronunciado sobre la vibración forzada. Este es el fenómeno denominado de "salto" que se explica dramáticamente en la Fig. 4.12. A altas frecuencias, son posibles

Fig. 4.12




tres relaciones de amplitud. Si $\omega_C < \omega_B$, no pueden obtenerse las amplitudes desde $C$ a $B$. Si se disminuye la frecuencia desde cierto valor arriba de la resonancia, la amplitud aumentará según la línea $DC$. En $C$, la amplitud "saltará" hasta $C$ sin cambio alguno en la frecuencia. Si la frecuencia aumenta desde cierto valor abajo del de resonancia, la amplitud aumentará a lo largo de la curva más alta $AB$. Si no existe amortiguación, la amplitud continúa aumentando con un aumento en la frecuencia, hasta que ocurre una falla catastrófica. Por fortuna, siempre se encuentra presente la amortiguación. Con la amortiguación se limita la amplitud en la resonancia y la amplitud "salta" hasta $B'$ sin ningún cambio de frecuencia. Aun con el efecto limitante de amplitud de la amortiguación, el grado de amortiguación puede no ser suficiente para evitar la falla catastrófica.

Merece mención otra fase de la respuesta no lineal. Si volvemos a la Ec. 4.30 y sustituimos nuestra solución de prueba para $x$, pero no para $\ddot{x}$, tenemos

$$-m\ddot{x} + k_0 X \operatorname{sen} \omega t + \kappa X^3 \operatorname{sen}^3 \omega t = F_1 \operatorname{sen} \omega t$$



sustituyendo la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^3 \omega t = \tfrac{1}{4}(3 \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 3\omega t)$$

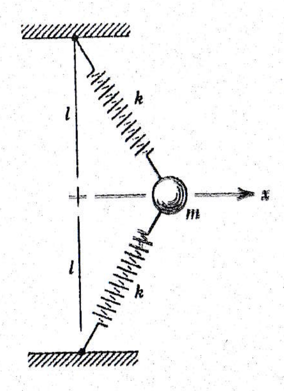
tenemos

$$\ddot{x} = \left(\frac{k_0}{m} + \frac{3}{4}\frac{X^3}{m} - \frac{F_1}{m}\right) \operatorname{sen} \omega t - \frac{\kappa X^3}{4} \operatorname{sen} 3\omega t$$

integrando para $x$, el desplazamiento será una ecuación del tipo

$$x = B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t$$

que contiene una primera y una tercera armónicas. Esta es una aproximación más cercana al desplazamiento real que al movimiento armónico simple que se ha supuesto, pero en la mayor parte de los casos prácticos, la amplitud de la tercera armónica es tan pequeña, que se puede despreciar. La rara excepción la constituye el caso en el que la tercera armónica presente en la amplitud, hace juego con la tercera armónica presente en la función forzante y, añade energía al sistema a través de un número entero de ciclos, en cuyo caso la amplitud de movimiento aumentará. La tercera armónica no puede aumentar por separado, sin que aumente también la amplitud de la fundamental. Si ocurre respuesta, la vibración observada tendrá una frecuencia de un tercio de la frecuencia natural. Este muy raro fenómeno es la *resonancia subarmónica*. Esta se ocasiona por la no linealidad del sistema y nunca ocurre en sistemas lineales.




**PROBLEMA 4.39**

En el sistema no lineal mostrado, la masa $m$ está sujeta a los dos resortes. Cuando la masa se encuentra a la mitad del movimiento, los resortes tienen una tensión inicial cero. Escríbase la ecuación diferencial de movimiento para la vibración libre del sistema, suponiendo que el movimiento está restringido según el eje-$x$.

**PROBLEMA 4.40**

Escríbase la ecuación diferencial de movimiento para un péndulo simple de masa $m$ y longitud $l$, usando los

dos primeros términos de una expansión de serie exponencial para sen $\theta$.

Respuesta: $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\left[\theta-\frac{\theta^3}{6}\right]=0$

**PROBLEMA 4.41**

Suponiendo movimiento armónico, $\theta(t) = \Theta$ sen $\omega_n t$, determínese el periodo de oscilación del péndulo simple del Prob. 4.40 cuando la longitud del péndulo es $l$ = 300 mm y la amplitud de oscilación es

(a) $\Theta=\frac{\pi}{36}$

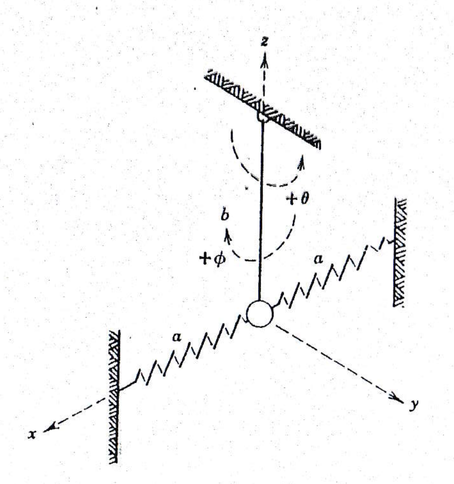
(b) $\Theta=\frac{\pi}{6}$

Compárense estos resultados con la solución pequeña amplitud.

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

**PROBLEMA 4.42**

Se altera un péndulo simple de masa $m$ y longitud $b$, sujetando dos resortes a la masa. Supóngase por simplicidad que la distancia $b$ es la longitud libre del resorte. Usando los dos primeros términos de la expansión de serie exponencial para sen $\theta$, escríbase la ecuación de movimiento para la vibración del sistema en el plano $y$-$z$. Nótese que los términos no lineales se compensan entre sí.




Respuesta: $\ddot{\theta}+\frac{g}{b}\theta\left[\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{k}{m}-\frac{g}{6b}\right]\theta^3=0$

**PROBLEMA 4.43**

Determínese, para el péndulo simple del Prob. 4.42

(a) La ecuación de movimiento para la vibración libre del sistema, en el plano $x$-$z$.
(b) Una ecuación no lineal aproximada, de movimiento.
(c) Una ecuación lineal aproximada de movimiento.

**PROBLEMA 4.44**

Determínese la ecuación de movimiento no lineal, para oscilaciones grandes, del péndulo invertido del Prob. 2.24.

Respuesta: $\ddot{\theta}-\frac{3g}{l}\operatorname{sen}\theta+\frac{3k}{m}\operatorname{sen}2\theta=0$

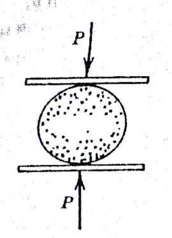
**PROBLEMA 4.45**

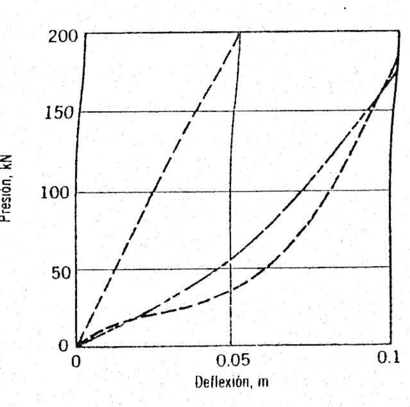
En el Prob. 4.39, supóngase que la fuerza excitante $F_1$ sen $\omega t$, se aplica a $m$ en la dirección-$x$. Si $F_1$ = 50 N, $k$ = 22.5 N/mm, $m$ = 1.5 kg, $l$ = 50 mm, $X_0$ = 25 mm, determínese el valor aproximado de la amplitud de estado estable de las vibraciones forzadas, para $\omega$ = 200 rad/s.

Respuesta: 0.83 mm

**PROBLEMA 4.46**

Un resorte de hule patentado, para vehículos de trabajo pesado, consiste de un elastómero conformado esféricamente y adherido en forma permanente entre dos placas metálicas. El resorte se rigidiza al aumentar la carga del vehículo, y se reblandece al disminuir la misma. Lo anterior produce una frecuencia natural más constante sin importar la cantidad de carga que se transporta. Se muestra en la gráfica la deformación del sistema de suspensión del vehículo en función del peso bruto. La masa bruta del vehículo es de 2 000 kg vacío, y 15 000 kg cargado. Determínese el movimiento del vehículo vacío, cuando viaja a 100



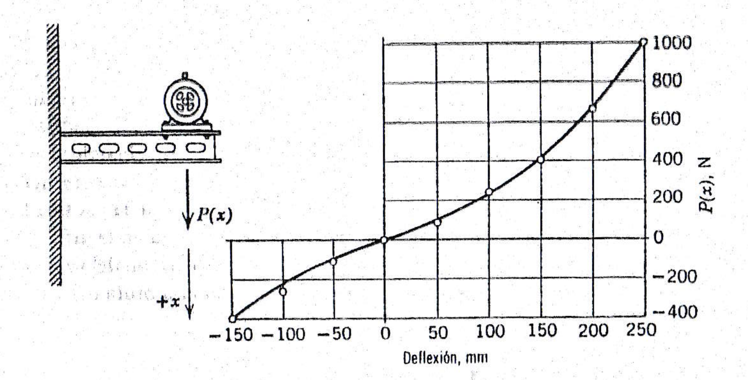




km/h, sobre un camino que tiene cintas de asfalto que se proyectan 7 mm por sobre la superficie del mismo, cada 5 m, tanto para la suspensión lineal, como para la suspensión no lineal.

**PROBLEMA 4.47**

Un motor eléctrico tiene una masa de 12.5 kg y está montado sobre una estructura en voladizo que se proyecta desde una pared. Se muestra la curva de deformación de la estructura, para una carga adicional *P(x)* aplicada al montaje del motor. Si la armadura del motor tiene una masa de 5 kg y se sabe que tiene una excentricidad de 1 mm, determínese la amplitud vertical de movimiento cuando el motor trabaja a 600 rpm.

Respuesta: 0.042 mm

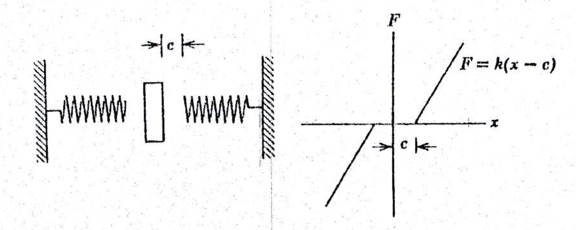





**PROBLEMA 4.48**

Con frecuencia, los sistemas mecánicos presentan claros entres las partes mecánicas. Estos claros dan lugar a características no lineales. El resorte lineal tiene un módulo de $k$ y está en serie con un claro c entre la masa y el resorte. La frecuencia natural del resorte y la masa, cuando el claro vale cero, es de 30 Hz. ¿Cuál es la frecuencia natural reducida para una amplitud total de 1 mm si el claro c es igual a 0.5 mm?

Respuesta: 18.3 Hz



# CINCO

# CONDICIONES INICIALES Y VIBRACION TRANSITORIA

## 5.1 INTRODUCCION

Una componente temporal del movimiento, se llama *transitoria*. En general, el movimiento transitorio o transitoria, acompaña a cualquier cambio en la cantidad o forma de energía almacenadas en un sistema vibratorio. En muchos casos se puede ignorar la vibración transitoria, considerándose solamente la vibración de estado estable. No obstante, no siempre son posibles grandes márgenes de seguridad en los cuales la ignorancia de las condiciones transitorias se pueda sepultar, y en la actualidad, el estudio de la vibración transitoria constituye una de las más grandes áreas de interés en el estudio de las vibraciones mecánicas. El análisis del movimiento transitorio requiere un tratamiento matemático extenso y métodos de computación modernos.

En el estudio de la vibración mecánica, el del movimiento transitorio se centra alrededor del problema del sobreesfuerzo y la posibilidad de una falla catastrófica o quizá de fatiga a pocos ciclos. Aun cuando nuestras matemáticas pueden ser similares a las de otros problemas en ingeniería, tales como los de teoría del control, nuestras perspectivas del problema físico son diferentes. No estamos tan interesados en la longitud de tiempo durante el cual disminuye la transitoria, como lo estamos en el número de ciclos de gran amplitud o de alto esfuerzo que pueda sufrir el sistema. La presencia de la condición transitoria no es tan importante como lo es el valor de la amplitud máxima o del esfuerzo máximo.

La solución exacta de los problemas de vibración transitoria es difícil, y requiere métodos matemáticos avanzados, pero existen tres funciones forzantes

básicas que pueden ser utilizadas para dar solución aproximada a los problemas de movimiento transitorio. Estas son la función forzante de escalón rectangular o para una carga súbitamente aplicada, la función de paso exponencialmente decreciente y la función forzante de rampa en la que la fuerza aumenta linealmente al transcurrir el tiempo. Ya que nuestro interés principal es el de determinar si ocurrirá una falla mecánica, muchas veces podemos ignorar la solución matemática completa en favor de una solución aproximada que use una de estas tres funciones básicas. Las soluciones aproximadas son con frecuencia suficientes para satisfacer las interrogantes de diseño.

## 5.2 LA FUNCION FORZANTE DE ESCALON RECTANGULAR

Si se aplica súbitamente una carga constante $F_0$ a un sistema simple de resorte y masa, el resorte se deformará una distancia $F_0/k$, y la masa oscilará alrededor de esta nueva posición de equilibrio. La amplitud de la vibración dependerá de las condiciones de movimiento iniciales.

Considérese el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 5.1, después de que se ha aplicado la carga $F_0$. La ecuación de movimiento es,

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \tag{5.1}$$

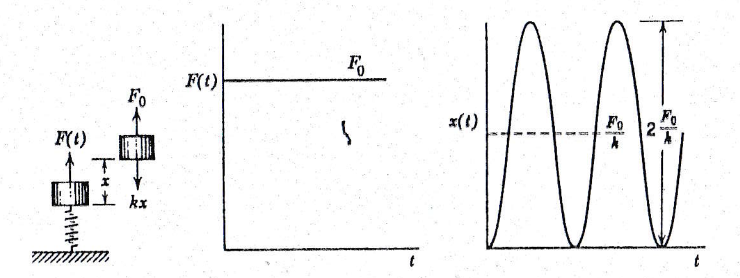
y el desplazamiento $x$, es

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k} \tag{5.2}$$

Si el sistema estuviera inicialmente en equilibrio, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Las constantes arbitrarias $A$ y $B$ dejan de ser arbitrarias; la sustitución de las condiciones iniciales mostrará que las constantes son $A = -F_0/k$ y $B = 0$ y la respuesta sería

$$x = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t) \tag{5.3}$$

Fig. 5.1






En la Fig. 5.1 se muestra este movimiento en una curva desplazamiento-tiempo. Nótese que la amplitud de movimiento máxima es $2(F_0/k)$. Esta es una sencilla afirmación que es muy valiosa para el diseño. La amplitud máxima para una carga súbitamente aplicada, es dos veces la amplitud para la misma carga aplicada estáticamente.

Si la masa $m$ no estuviera inicialmente en reposo, la amplitud de movimiento sería mayor. Si $x(0) = x_0$ y $\dot{x} = v_0$, $A = x_0 - (F_0/k)$ y $B = v_0/\omega_n$

$$x = \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

la que se puede redisponer algebraicamente en una forma más instructiva,

$$x = \left(\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}\right) \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t) \tag{5.4}$$

Si el sistema hubiera estado inicialmente en reposo, el primer término de la Ec. 5.4 valdría cero, y la Ec. 5.4 sería idéntica a la Ec. 5.3.

## 5.3 LA FUNCION FORZANTE DE RAMPA O LINEALMENTE CRECIENTE

En la Fig. 5.2, la función forzante $F(t)$ aumenta linealmente al transcurrir el tiempo. Naturalmente, no puede crecer en forma idefinida, pero nuestro interés se confina al régimen en el que la fuerza aumenta linealmente y dentro del cual no se ha alcanzado el límite elástico del resorte. La ecuación de movimiento es

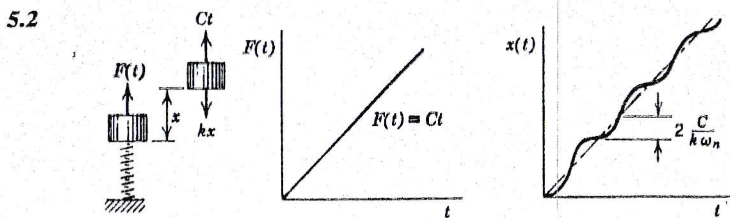
$$m\ddot{x} + kx = Ct \tag{5.5}$$

para la que

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{Ct}{k} \tag{5.6}$$

Otra vez, las constantes arbitrarias $A$ y $B$ dependen de las condiciones iniciales. Si el sistema estuviera inicialmente en resposo, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$,

Fig. 5.2



las constantes arbitrarias $A = 0$ y $B = -C/k\omega_n$

$$x = \frac{C}{k\omega_n}(\omega_n t - \text{sen}\,\omega_n t) \tag{5.7}$$

El desplazamiento oscila a la frecuencia natural $\omega_n$ alrededor de una posición media, que aumenta linealmente con el tiempo. La amplitud de esta oscilación es $C/k\omega_n$. Es posible la falla catastrófica y el desplazamiento máximo a partir de la posición original de equilibrio en cualquier momento $t$, es

$$X = \frac{C}{k\omega_n}(1 + \omega_n t) \tag{5.8}$$

## 5.4 LA FUNCION DE PASO EXPONENCIALMENTE DECRECIENTE

Una tercera función forzante básica es la correspondiente a una carga súbitamente aplicada que disminuye o se amortigua exponencialmente con el transcurso del tiempo. Esta tipifica muchos impulsos semejantes a los de una voladura, y se puede adaptar a una variedad de problemas cambiando el valor del exponente $a$, que tiene las mismas unidades que $\omega$, radianes/segundo.

En la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{-at} \tag{5.9}$$

para la cual la solución es

$$x = A\cos\omega_n t + B\,\text{sen}\,\omega_n t + \frac{F_0 e^{-at}}{ma^2 + k} \tag{5.10}$$

La similitud matemática entre esta función forzante y la función forzante $F(t) = F_1 e^{i\omega t}$, se puede usar como analogía. Esta ecuación es la misma que la 4.6, con $a$ sustituida por $i\omega$ y $F_0$ sustituida por $F_1$.

Suponiendo condiciones de resposo inicialmente,

$$x = \frac{F_0}{k\left(1 + \frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{a}{\omega_n}\text{sen}\,\omega_n t - \cos\omega_n t + e^{-at}\right] \tag{5.11}$$

Si $a \to 0$, la función forzante disminuye lentamente y la curva desplazamiento-tiempo se aproxima a $x = (F_0/k)(1 - \cos\omega_n t)$, la respuesta a una función forzante de escalón rectangular.

Si $a \to \infty$, la función forzante disminuye inmediatamente a cero, el área bajo la curva fuerza-tiempo (que es el impulso neto), se aproxima a cero, y la fuerza no imparte cambio de velocidad a la masa $m$. Si $a \to \infty$, el sistema permanecerá sin movimiento.



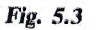
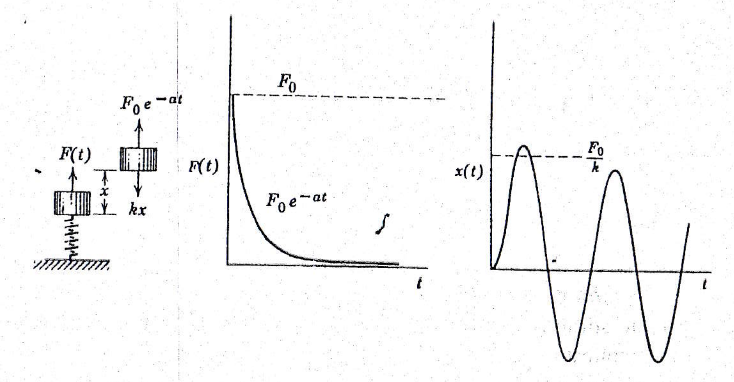


**Fig. 5.3**




Existen dos extremos. Entre éstos, el desplazamiento oscila con la amplitud, decreciendo con el tiempo. La amplitud de estado estable, que se alcanza para $at > 5$, es

$$X = \frac{F_0}{k\sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_n^2}}} \tag{5.12}$$

La amplitud máxima depende de la relación $a/\omega_n$, pero siempre es menor que $2(F_0/k)$. Otra vez éste es un hecho importante de recordar. El único modo de que el desplazamiento pueda exceder de $2(F_0/k)$ es que las condiciones iniciales tengan una velocidad inicial impartiendo energía cinética al sistema. La Fig. 5.3 muestra la respuesta de un sistema simple a una función de paso exponencialmente decreciente.

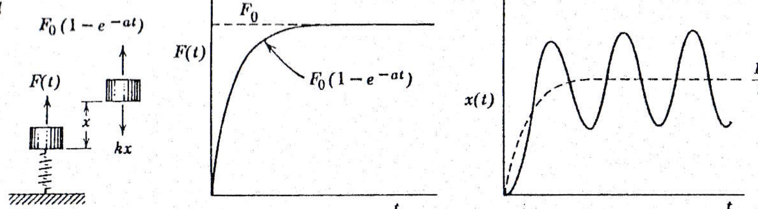
## 5.5 COMBINACIONES DE FUNCIONES FORZANTES

Las tres funciones forzantes básicas se pueden combinar según una variedad de modos, para aproximarse tan cerca como sea posible, a la función forzante transitoria. En un sistema lineal, la respuesta a una combinación de dos o más funciones forzantes, que actúan todas al mismo tiempo, se puede encontrar por superposición de las respuestas a cada función forzante, una sobre otra. En las matemáticas lineales esto se conoce como el principio de superposición.

**Escalón rectangular-paso exponencialmente decreciente.** Como un ejemplo de combinación de importancia práctica, se puede sustraer una función forzante exponencialmente decreciente, de una de escalón rectangular.

$$F(t) = F_0(1 - e^{-at}) \tag{5.13}$$

**Fig. 5.4**




Esta función es familiar, ya que es análoga a la respuesta de un termómetro de vidrio sumergido en un baño líquido. Es evidente que $F(t)$ podría reproducir la respuesta transitoria al esfuerzo térmico o a un impulso térmico debido al calentamiento súbito.

Por combinación de la Ec. 5.2 con la Ec. 5.10, la solución a tal función forzante transitoria, podría ser

$$x = A\cos\omega_n t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_n t + \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{e^{-at}}{\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\right] \tag{5.14}$$

Si el sistema se hubiera encontrado inicialmente en reposo, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$

$$x = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{a}{\omega_n}\left(\frac{a}{\omega_n}\cos\omega_n t + \mathrm{sen}\,\omega_n t\right) + e^{-at}\right] \tag{5.15}$$

En la Fig. 5.4 se muestra la respuesta a este movimiento. Nótese que el movimiento llega a ser armónico simple para $at>5$, oscilando alrededor de una nueva posición de equilibrio, que se ha desplazado una distancia $F_0/k$. Despreciando la exponencial $e^{-at}$, que podría ser casi cero para $at>5$.

$$x = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{\frac{a}{\omega_n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega_n^2}}}\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)\right] \tag{5.16}$$

La amplitud del movimiento armónico simple es

$$\frac{F_0}{k}\cdot\frac{\frac{a}{\omega_n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega_n^2}}}$$



y la excursión máxima posible es

$$\frac{F_0}{k}\left[1 + \frac{\frac{a}{\omega_n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega_n^2}}}\right] \tag{5.17}$$

**Dos funciones forzantes de paso exponencialmente decreciente.** Un segundo ejemplo de importancia práctica, es el de sustraer una función de paso exponencialmente decreciente, de otra con constante de tiempo más larga.

$$F(t) = F_0(e^{-at} - e^{-bt}) \tag{5.18}$$

Para que $F(t)$ sea positiva, $b>a$. Se puede aproximar una variedad de impulsos semejantes a los de una voladura cambiando las constantes de tiempo $a$ y $b$. en la Fig. 5.5 se muestra el impulso para $b = 2a$. El desplazamiento $x$ es

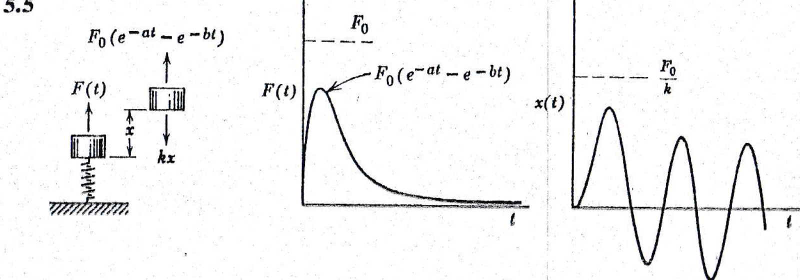
$$x = A\cos\omega_n t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_n t + \frac{F_0}{k}\left[\frac{e^{-at}}{\left(\frac{a^2}{\omega_n^2}+1\right)} - \frac{e^{-bt}}{\left(\frac{b^2}{\omega_n^2}+1\right)}\right] \tag{5.19}$$

Para condiciones iniciales de reposo,

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{a}{\omega_n}\mathrm{sen}\,\omega_n t - \cos\omega_n t + e^{-at}\right] - \frac{F_0}{k\left(1+\frac{b^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\frac{b}{\omega_n}\mathrm{sen}\,\omega_n t - \cos\omega_n t + e^{-bt}\right] \tag{5.20}$$

**Funciones sucesivas.** También es posible sumar o sustraer una función con otra, usando las soluciones anteriores en sucesión como bloques de construc-

**Fig. 5.5**



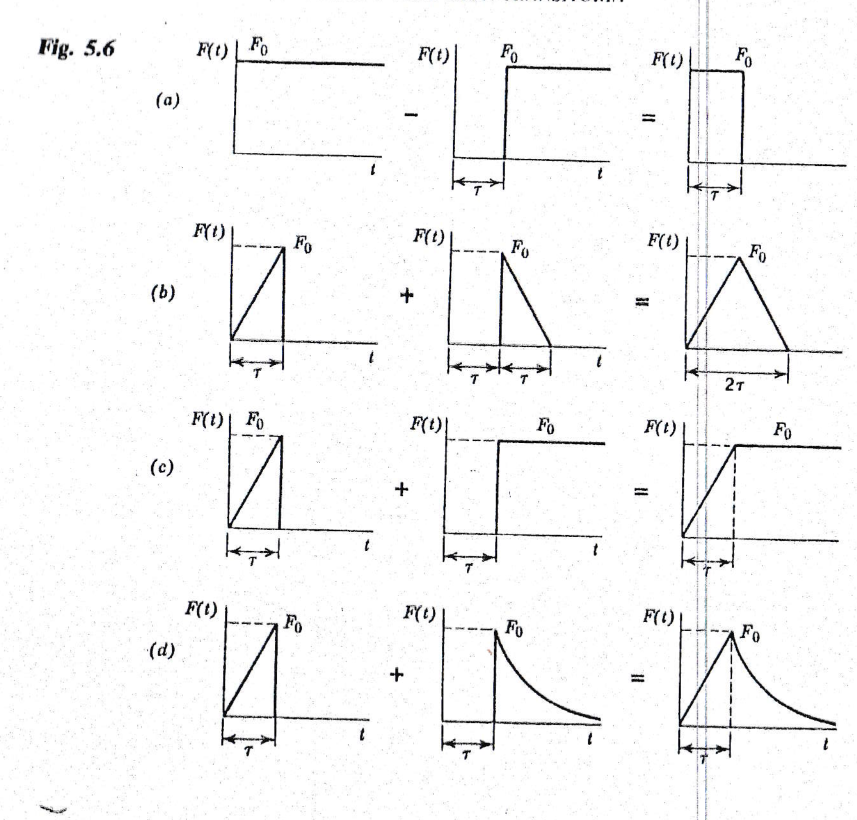


Fig. 5.6

ción para funciones forzantes más complicadas. Como ejemplo, la Fig. 5.6a muestra la sustracción de una función de escalón rectangular de otra de igual magnitud, pero después de que ha transcurrido un intervalo $\tau$ de tiempo. El resultado es un impulso cuadrado. En la Fig. 5.6b se muestra el resultado de haber sumado una función forzante linealmente creciente, que tiene una duración de un periodo de $\tau$ de una fuerza máxima de $F_0$ a una función forzante linealmente decreciente que es una imagen de espejo de la anterior.

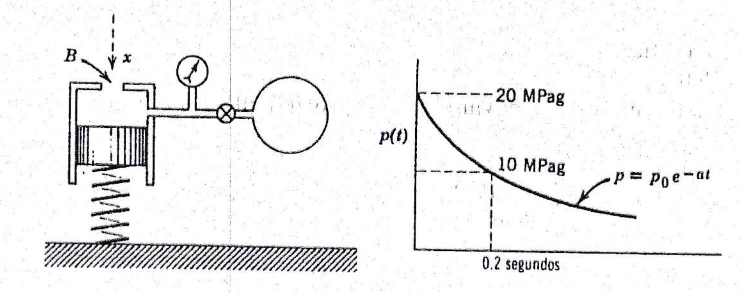
De la misma forma, en la Fig. 5.6c, se suma una función de rampa a una función de escalón rectangular, produciéndose una función forzante de tiempo finito de crecimiento. Una función de rampa podría combinarse con una función exponencialmente decreciente como se muestra en la Fig. 5.6d. Este último ejemplo constituye una aproximación excelente al caso de un choque. Si la función forzante se expresa en presión, podría simular una onda de choque. En cada uno de los casos 5.6a, b, c, d, no estamos superponiendo funciones forzantes, sino aplicándolas sucesivamente. La condición terminal de una transitoria, es la condición inicial de la siguiente. Este no es un modo fácil de resolver problemas de condiciones transitorias, pero es directo. Es



físicamente simple, pero algebraicamente difícil, a menos que se usen los términos matemáticos más simples. Para un ingeniero, es muy sencillo ver lo que está sucediendo. Como ejemplo, si el aumento de tiempo, $\tau$, es igual a la mitad del periodo natural del sistema de grado simple de libertad, el sistema estará en su desplazamiento máximo cuando ocurra la transición. Similarmente, si el aumento de tiempo es igual al periodo natural del movimiento o a algún múltiplo del periodo natural, el sistema tendrá un desplazamiento mínimo cuando ocurra la transición.

## PROBLEMA EJEMPLO 5.1

Un émbolo de 20 kg se desliza dentro de un cilindro liso de diámetro interior de 125 mm y está soportado por un resorte de módulo elástico de 965N/m. En el tiempo $t = 0$, la válvula entre el depósito de gas y el cilindro se abre súbitamente aumentando la presión en el cilindro a 20 MPag. Se deja entonces escapar el gas a través de un orificio $B$, descendiendo la presión exponencialmente con el tiempo de manera que, después de 0.2 s ha bajada hasta un valor de 10 MPag. Determínese la respuesta transitoria del émbolo, como función del tiempo, y la amplitud de estado estable de la carrera del émbolo.




***Solución:***
Se sabe que la presión tiene un valor inicial de 20 MPag, que disminuye exponencialmente con el tiempo, pasando a través del punto en el que $p(t) = 10$ MPag cuando $t = 0.2$ s. Las constantes físicas son

$$p = p_0 e^{-at}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-at}$$

resolviendo para la constante a,

$$\tfrac{1}{2} = e^{-a(0.2)}$$

$$a = 3.47\ \text{s}^{-1}$$

y la frecuencia natural $\omega_n$,

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{965}{20} = 48.25\ \text{s}^{-2}$$

$$\omega_n = 6.94\ \text{s}^{-1}$$

Para la ecuación de movimiento,

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{-at} = p_0 A_r e^{-at}$$

$A_r$ es el área proyectada. La solución es

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{p_0 A_r e^{-at}}{(ma^2 + k)}$$

Para condiciones iniciales de reposo, $x(0) = 0$, y $\dot{x}(0) = 0$

$$x = \frac{p_0 A_r}{(ma^2 + k)} \left( \frac{a}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t - \cos \omega_n t + e^{-at} \right)$$

Una graficación de estas ecuaciones, como funciones del tiempo muestra que la deformación máxima ocurre después de 0.36 s, y vale 0.312 m.

Como $e^{-at} \to 0$, el movimiento se aproxima al estado estable.

$$x = \frac{p_0 A_r}{(ma^2 + k)} \cdot \left( \frac{a}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t - \cos \omega_n t \right)$$

$$= \frac{p_0 A_r}{(ma^2 + k)} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_n^2}} \right) \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

$$= \frac{p_0 A_r}{k \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_n^2}}} \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

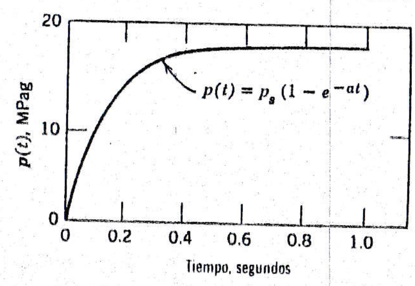
Para este caso, $a/\omega_n = ½$ y

$$x = \frac{p_0 A_r}{k \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_n^2}}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \frac{\left[ (20\,000) \left( \frac{\pi}{4} \right) (0.125)^2 \right]}{965} = 0.227 \text{ m}$$



**PROBLEMA 5.2**

Se somete el émbolo del Prob. Ej. 5.1, a una presión por escape lento hacia el interior en lugar de hacia el exterior. La presión final estática es $p_s$. Determínese la respuesta del sistema y calcúlese el desplazamiento máximo del émbolo dentro del cilindro.




**PROBLEMA 5.3**

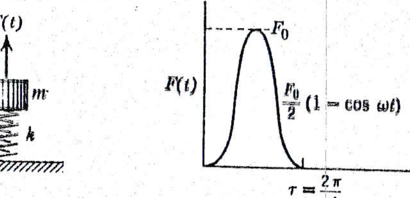
Determínese una expresión para la respuesta transitoria de un sistema lineal de grado único de libertad, al impulso de seno verso

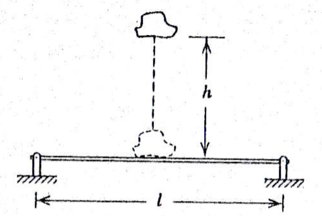
$$\frac{F_0}{2}(1 - \cos \omega t)$$

para $t < \tau$, suponiendo que el sistema se encontraba inicialmente en reposo.

Respuesta:

$$x = \frac{F}{2k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \times \left[ 1 - \cos \omega t - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}(1 - \cos \omega_n t) \right]$$




**PROBLEMA 5.4**

Un peso descendente de masa $m$, cae desde una altura $h$, y golpea una viga simplemente soportada que tiene una masa igual, y permanece sujeto a ésta, sin rebotar. Determínense la deflexión dinámica de la viga en términos de la deflexión estática y el módulo de plasticidad, la rigidez contra flexión y la longitud del

claro, considerando que la deflexión permanece elástica. En el impacto, la velocidad del peso es $v$. Después del impacto, la deflexión de la viga es $\Delta_{st}$.

Respuesta: $\delta = \Delta_{st}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{m}{m+\frac{17}{35}m}\right)\frac{v^2}{g\Delta_{ST}}}\right]$



**PROBLEMA 5.5**

El empaque de un instrumento instalado en la parte anterior de un cohete, está acojinado contra vibraciones. El cohete se dispara verticalmente desde el resposo con una aceleración que aumenta linealmente con el tiempo $\ddot{u} = bt$, en donde $b$ es una constante. Derívese la ecuación de movimiento para el paquete del instrumento, si tiene una masa $m$. Derívense expresiones para el desplazamiento relativo del paquete con respecto al cohete y su aceleración absoluta como función del tiempo.

$\ddot{u} = bt$

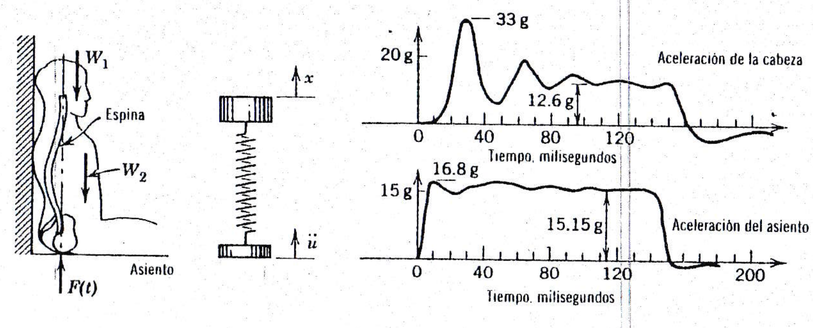
Respuesta: $\ddot{x} = bt\left[1-\frac{1}{\omega_n t}\text{sen }\omega_n t\right]$

**PROBLEMA 5.6**

Si el cohete del Prob. 5.5 fuera a ser disparado verticalmente, a partir del reposo con una aceleración constante $\ddot{u} = c$, encuéntrese una expresión para el desplazamiento relativo del paquete con respecto al cohete.

**PROBLEMA 5.7**

En experimentos con un asiento de expulsión, se modela el torso como un sistema de resorte y masas. La cabeza es una masa única que pesa 5.44 kg. Esta se halla soportada por la columna vertebral con un módulo elástico de 21.89 N/mm. Si la expulsión se realiza según la curva aceleración-tiempo mostrada, determínese la aceleración máxima de la cabeza. ¿Hace esto juego con el experimento?








**PROBLEMA 5.8**

Desde una tolva, se cargan en diez segundos 1 000 kg de arena sobre un camión de volteo. El camión de volteo y su carga pesan 10 000 kg antes de que se carguen los 1 000 kg de arena. Los resortes del camión tienen un módulo de 350 kN/m. Calcúlese el desplazamiento vertical del camión al final del proceso de carga. Se puede suponer que la arena se carga bajo un régimen uniforme durante los diez segundos.

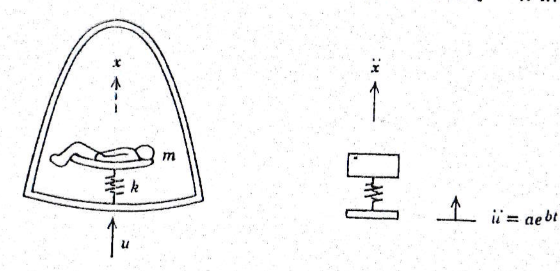
Respuesta: 30.4 mm

**PROBLEMA 5.9**

En el disparo de la segunda o tercera etapas de un cohete la aceleración aumenta lentamente de acuerdo con

$$\ddot{u} = ae^{bt}$$

Determínese una expresión para la aceleración $\ddot{x}$ que percibe el astronauta. Supóngase que las condiciones iniciales son $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, en donde $z = x - u$.



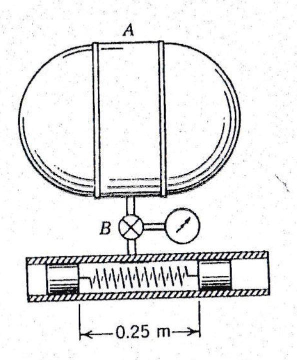

**PROBLEMA 5.10**

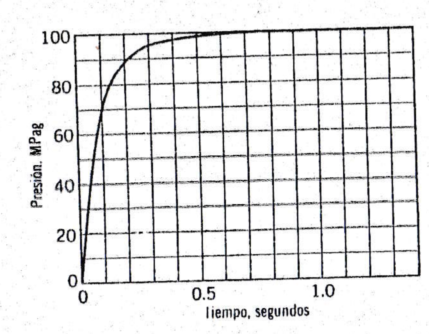
Un alambre delgado, de longitud $l$, coeficiente lineal de expansión térmica $\alpha$, sección transversal $A$ y módulo elástico $E$, soporta una masa $m$. La continuidad eléctrica se mantiene por medio de un depósito de mercurio que ofrece poca resistencia al movimiento de la masa. Cuando se cierra el interruptor, el capacitor descarga a través del alambre. El régimen de elevación de temperatura para el alambre, es $\phi - \phi_0 = (\phi_m - \phi_0)(1 - e^{-t/t_1})$ en donde $\phi_0$ es la temperatura ambiente y $\phi_m$ es la temperatura máxima y $t_1 = L/R$. Determínese la ecuación de movimiento y la deflexión $x$, cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo.

**PROBLEMA 5.11**

Dos émbolos idénticos, cada uno de los cuales pesa 2.5 kg, están elásticamente conectados con una constante de 2 000 N/m, y se hallan dispuestos dentro de un tubo liso que tiene 50 mm de diámetro. En el reposo, el resorte se halla extendido y sin comprimir, y los émbolos se hallan separados entre sí 0.25 mm. Los émbolos y el tubo están conectados, a través de la válvula $B$, a un tanque grande de almacenamiento, que contiene un gas seco almacenado a una presión de 100 MPag. En cierto instante, se abre la válvula $B$, y la presión del tubo se eleva hasta la presión del tanque de almacenamiento, como se muestra. Determínense las separaciones máxima y mínima de los émbolos, antes de que sea alcanzado el equilibrio.

Respuesta: 0.372 m; 0.324 m



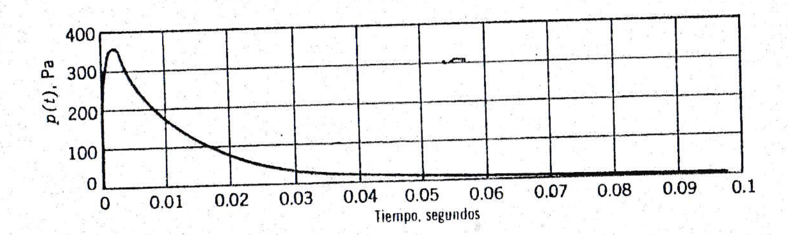




**PROBLEMA 5.12**

Un impulso de presión atmosférica se puede representar aproximadamente por la ecuación

$$p(t) = 500[e^{-100t} - e^{-1000t}]$$

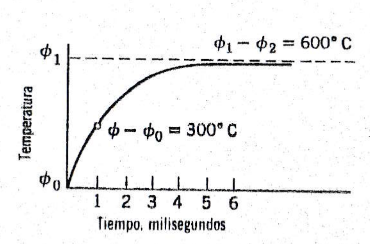
en la que $p(t)$ está en pascales, y $t$ en segundos. Calcúlese el desplazamiento lateral de un automóvil pe-

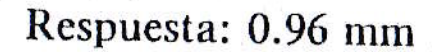





queño que tiene un área proyectada de 5 m² y una masa de 800 kg. Las cuatro llantas de hule tienen una resistencia total del movimiento lateral, medida en 618 N/mm.

Respuesta: 0.96 mm







**PROBLEMA 5.13**

Un blanco de 2 kg está suspendido de un tirante único cilíndrico de acero, de 1.06 m de longitud y 5 mm de diámetro y colocado en una pila atómica donde se le somete a un bombardeo de neutrones. Esto induce una rápida elevación de temperatura tanto en el blanco como en el tirante y también un esfuerzo térmico $E\alpha(\phi - \phi_0)$ en el tirante, en donde $E$ es el módulo de elasticidad $\alpha$ es el coeficiente de expansión, y $(\phi - \phi_0)$ es la diferencial de temperatura. Si la diferencial de temperatura es de 300° después de un milisegundo, y alcanza un valor de estado estable de 600°C exponencialmente, $(\phi - \phi_0) = 600(1 - e^{-at})$, ¿cuáles son

(a) La amplitud de movimiento de la vibración térmicamente inducida?

(b) ¿El desplazamiento máximo del blanco a partir de su posición original?

*Indicio:* Superpóngase el esfuerzo elástico debido al desplazamiento del blanco y el esfuerzo térmico inducido.

Respuesta: (a) 3.3 mm; (b) 10.8 mm

## 5.6 ESPACIO DE ESTADO Y EL PLANO DE FASE

Para un sistema elástico simple, la ecuación de movimiento se describe por la ecuación diferencial lineal de segundo orden,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{5.21}$$

en la que $\omega_n^2$ se determina por las constantes del sistema. Introduzcamos una variable de estado, $y$, que se define como

$$y = \frac{\dot{x}}{\omega_n} \tag{5.22}$$

Esta se denomina una variable de estado, porque es una función de la derivada con respecto al tiempo, de la variable $x$. Diferenciando,

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{\omega_n}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de movimiento, se reduce la ecuación, de una ecuación simple de segundo orden, a dos ecuaciones de primer orden, 5.22, y

$$\dot{y}\omega_n + \omega_n{}^2 x = 0$$

$$x = -\frac{\dot{y}}{\omega_n} \tag{5.23}$$

Dividiendo $\dot{y}$ entre $\dot{x}$, se cancela la frecuencia $\omega_n$.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{5.24}$$

El motivo de este juego matemático es claro. La Ec. 5.24 describe un círculo en el que $x^2 + y^2 = X^2$. Podemos graficar $y = f(x)$ como un círculo de radio $X$, que es una constante. La Fig. 5.7, es una gráfica como ésta.

La rotación del vector radio **X** describe tanto el desplazamiento como la velocidad armónicos. Este vector **X** gira a una velocidad angular $\omega_n$ y la posición del vector se localiza por el ángulo $(\omega_n t + \phi)$. El significado físico permanece sin cambio. Para un sistema elástico simple, el desplazamiento es armónico y

$$x = X\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)$$

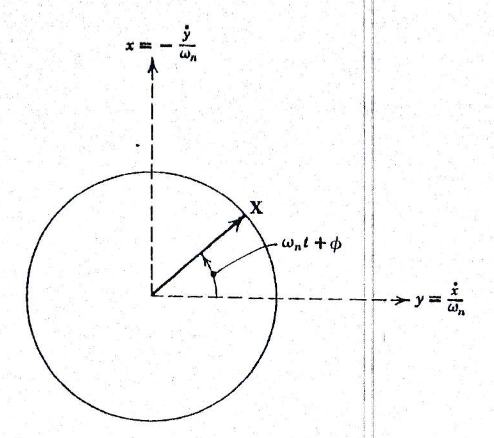
$$\dot{x} = y\omega_n = X\omega_n \cos(\omega_n t + \phi)$$

Cancelando $\omega_n$,

$$y = X\cos(\omega_n t + \phi)$$

Sumando $\mathrm{sen}^2\ (\omega_n t + \phi) + \cos^2(\omega_n t + \phi) = 1$ o $x^2/X^2 + y^2/X^2 = 1$, tendremos una descripción gráfica de $y = f(x)$, en la que $y$ y $x$ son la ordenada y la abscisa, respectivamente, conocidas como *plano-fase*. Cada punto en el plano-fase, representa un desplazamiento único y una velocidad única. El

**Fig. 5.7**






estado de resposo es el origen, en donde $x = 0$ y $y = \dot{y}/\omega_n = 0$. Todos los puntos que satisfacen la ecuación de movimiento $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$, caen sobre el círculo de radio $X$. La magnitud del vector **X** se determina por las condiciones iniciales del movimiento.

## 5.7 LA RESPUESTA DEL ESPACIO DE ESTADO AL IMPULSO DE ESCALON RECTANGULAR

Si se aplica súbitamente una carga constante a un sistema simple de resorte y masa en reposo, la posición de equilibrio se cambia en un desplazamiento de $F/k$. La ecuación de movimiento es ahora $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = F/m$. Ya que el sistema se encontraba en reposo, la velocidad inicial es cero, pero el desplazamiento inicial a partir del equilibrio es ahora $F/k$. Un círculo con un radio de $X = F/k$, centrado sobre la nueva posición de equilibrio, será el lugar geométrico de todos los puntos en el plano-fase o espacio de estado que representan el desplazamiento y la velocidad.

Después de un periodo $t_1$, se remueve súbitamente la carga aplicada también súbitamente. Las variables de estado en este momento son $y_1$ y $x_1$. Estas se tornan en las condiciones de estado inicial para el movimiento, que se describe ahora por la rotación de vector **X** alrededor del origen original. Tanto el desplazamiento como la velocidad, se pueden encontrar por proyección de los vectores respectivos $\mathbf{X}_1$ sobre ya sea el eje $x$ o el eje $y$, respectivamente. La Fig. 5.8 muestra gráficamente la respuesta a dicha carga súbitamente aplicada.

Si se siguieran uno a otro varios impulsos de escalón rectangular, las condiciones de estado terminal de un impulso, serán las condiciones de estado inicial del siguiente. En la Fig. 5.9, el arco desde (0, 0) a $(x_1, y_1)$ representa las condiciones de estado durante el intervalo de tiempo $t_1$. El arco desde $(x_1, y_1)$ a $(x_2, y_2)$ representa las condiciones de estado durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$. El arco desde $(x_2, y_2)$ a $(x_3, y_3)$ representa las del intervalo $t_3 - t_2$, y así sucesivamente. De esta manera se puede encontrar la respuesta a cualquier función forzante general, aproximando ésta a la respuesta a una serie de impulsos de escalón rectangular sucesivos.

**Fig. 5.8**

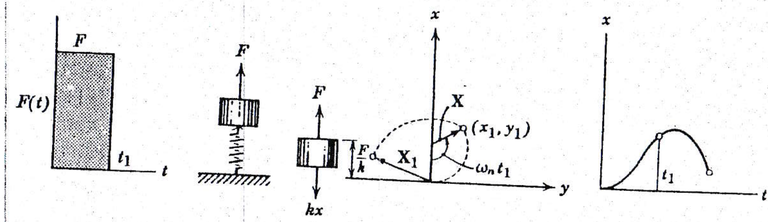
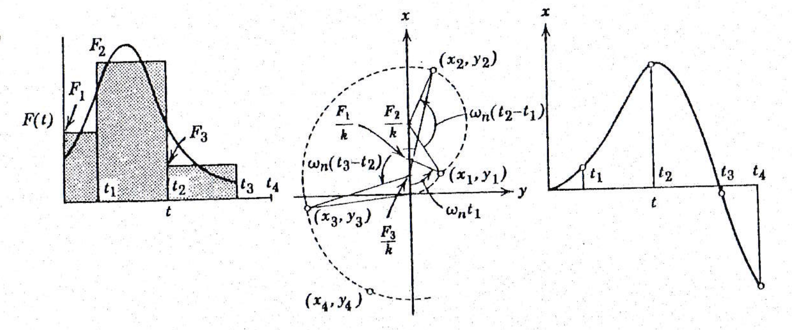
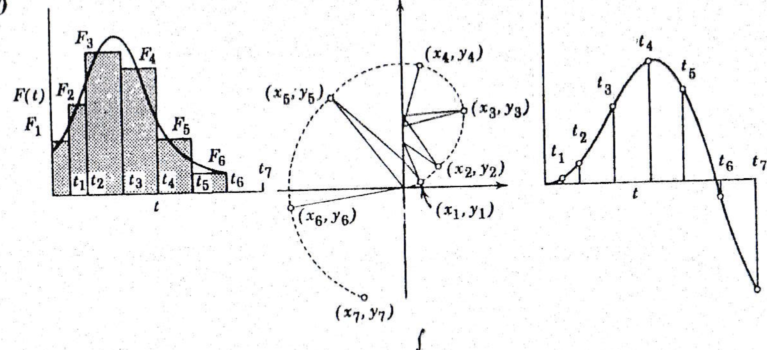


Fig. 5.9



La Fig. 5.9 representa una función forzante general que se puede aproximar por los tres impulsos de escalón. En la Fig. 5.10, se ha duplicado el número de impulsos, logrando una aproximación mejor por una curva espacio de estado más continua. Nótese que la curva a desplazamiento-tiempo es poco diferente de la de la Fig. 5.9. La curva velocidad-tiempo es menos exacta, como era de esperarse. El uso del plano de fase es un modo muy bueno de encontrar el desplazamiento, pero es un mal modo de encontrar la velocidad.

Fig. 5.10

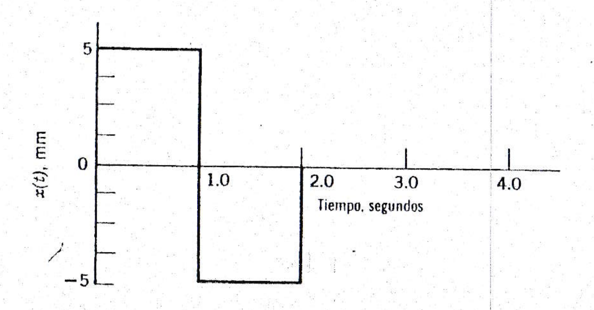


**PROBLEMA 5.14**

El péndulo del Prob. 4.19 tiene una longitud de 304 mm. Determínese (a) la excursión máxima y (b) la vibración de doble amplitud de estado estable del péndulo, después de un segundo, si la oscilación horizontal $x_1$ de la deslizadera varía como se muestra. Usese el plano de fase para la solución.

Respuesta: (a) + 10 mm, —11.62 mm; (b) 3.78 mm

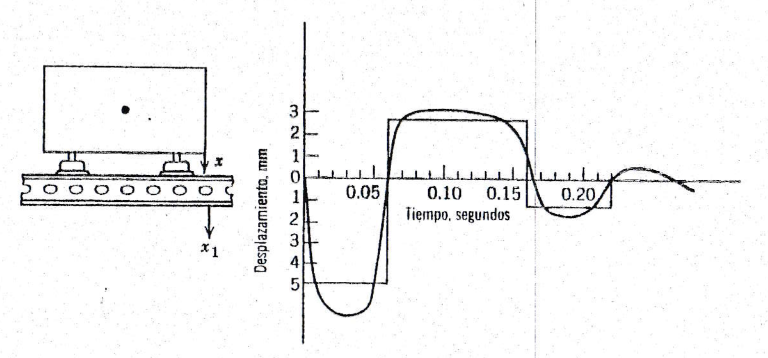





**PROBLEMA 5.15**

El empaque de un instrumento está montado dentro de una aeronave sobre aisladores comerciales. Los aisladores se deforman 4.76 mm bajo carga estática. Determínese gráficamente, usando el método del plano de fase, la amplitud máxima del empaque del instrumento si el fuselaje de la aeronave se mueve verticalmente como se muestra.

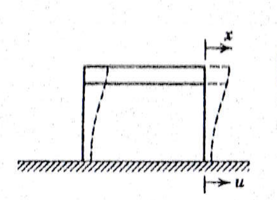
Respuesta: 1.55 mm

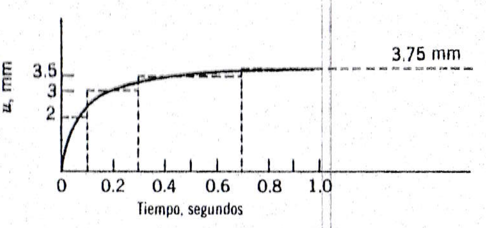



**PROBLEMA 5.16**

Se determina que el movimiento del piso en una estructura varía como se muestra en la curva desplazamiento-tiempo. Determínese gráficamente, usando el método del plano de fase, la respuesta lateral de la estructura con un periodo de 0.4 s, suponiendo que se encuentra inicialmente en reposo. Determínese la excursión máxima del movimiento y la doble amplitud de la vibración de estado estable al final de un segundo.

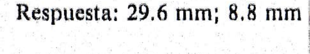
Respuesta: 5.88 mm; 3.88 mm



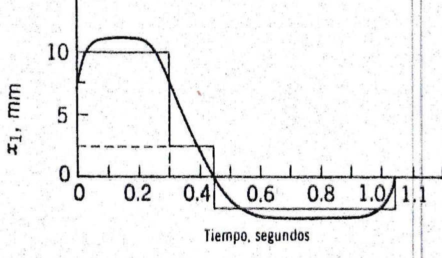




**PROBLEMA 5.17**

Se determina el movimiento del piso en la estructura del Prob. 5.16 con una variación como la mostrada en la curva desplazamiento-tiempo. Usando el método del plano de fase y suponiendo condiciones iniciales de reposo, determínense gráficamente la excursión máxima del movimiento, y la doble amplitud de la vibración de estado estable al final de 1.05 s.



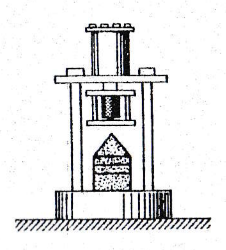
Respuesta: 29.6 mm; 8.8 mm

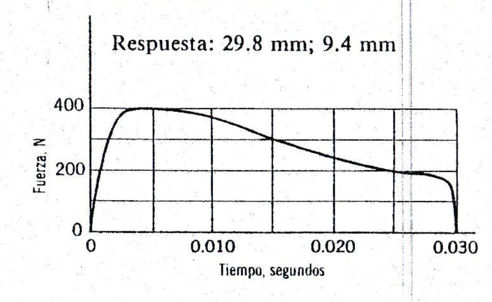



**PROBLEMA 5.18**

Un espécimen de prueba hace impacto contra una bolsa de hule llena de arena, que tiene una constante lineal de deformación de 25 N/mm para deformaciones de hasta 0.44 m. La mesa que soporta el espécimen se impulsa hidráulicamente como se muestra. Determínese la deformación máxima y la amplitud de estado estable, después de 0.030 s. El periodo natural de oscilación del sistema es 0.015 s.

Respuesta: 29.8 mm; 9.4 mm



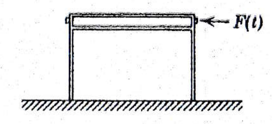


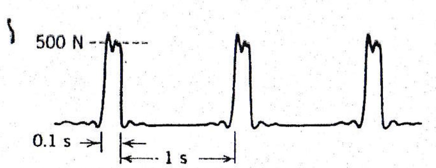



**PROBLEMA 5.19**

Una fuerza estática de 500 N, deforma la mesa 2 mm. La mesa recibe una serie de golpes cortos de martillo de duración de 0.1 s y a intervalos de 1 s entre golpes. ¿Cuál es el desplazamiento horizontal máximo de la mesa si la frecuencia natural de la misma es de un ciclo por segundo y se encuentra inicialmente en reposo?

Respuesta: 4 mm




## 5.8 EL USO DE METODO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En la solución de problemas de vibración, se usa también la transformación de Laplace, principalmente debido a que este método es de uso sencillo y tiene amplia aceptación, pudiéndose aplicar a ecuaciones diferenciales simples, sin tener que pasar a través de una diferenciación o una integración. Las tablas de transformadas son fácilmente obtenibles, y el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales se reduce a juzgar la transformada correcta o la transformada inversa.

Por definición, la transformada de Laplace de $x(t)$, es

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = f(s) \tag{5.25}$$

Aquí, $s$ es el parámetro de la transformada y se trata como constante. Para funciones simples, la integración es fácil.

$$\mathscr{L}(e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \frac{e^{-(s+a)t}}{-s+a}\Bigg]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathscr{L}(\cos at) = \int_0^\infty (\cos at)e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos at + a \operatorname{sen} at)\Bigg]_0^\infty = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathscr{L}(\operatorname{sen} at) = \int_0^\infty (\operatorname{sen} at)e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s \operatorname{sen} at - a\cos at)\Bigg]_0^\infty = \frac{a}{s^2+a^2}$$

y para la función de escalón,

$$\mathscr{L}(u(t)) = \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Estas funciones elementales son simples, y no se necesita el poder de la transformación de Laplace para resolver problemas que usan funciones exponenciales y trigonométricas, $e^{-\omega t}$, sen $\omega t$ y cos $\omega t$. Es conveniente, pero el método requiere la ecuación de movimiento y el establecer ésta es con frecuencia una labor difícil.

En la práctica, la ecuación de movimiento se transforma según Laplace, término por término. El resultado es una ecuación algebraica que se puede resolver para la función de transferencia y los valores característicos de la función de respuesta. La respuesta de tiempo se encuentra invirtiendo la transformada de Laplace. En el Apéndice A se incluye una corta Tabla de Transformadas de Laplace, pero para los problemas implicados, el estudiante deberá referirse a una colección más grande, y a alguno de los buenos libros de referencia acerca de las Transformadas y su aplicación a los problemas de ingeniería.

## 5.9 CONVOLUCION

Se puede también obtener la respuesta de un sistema simple de grado único de libertad a cualquier función forzante general $F(t)$, usando el método denominado convolución. Infortunadamente, si la función forzante es matemáticamente complicada, el método es de aplicación difícil, ya que requiere integración. Pero, para expresiones simples, es útil y constituye la base de los métodos más poderosos de transformadas.

El movimiento de un sistema sin amortiguación, no forzado, de grado único de libertad, es

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \text{sen } \omega_n t \tag{5.26}$$

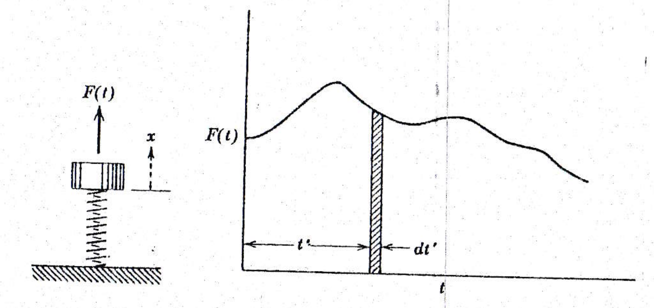
En esta ecuación, la amplitud inicial de movimiento es $x(0) = x_0$ y la velocidad inicial es $\dot{x}(0) = v_0$. Esta es una expresión general que describe cómo continúa el movimiento con el tiempo, una vez que se ha iniciado. Tanto la velocidad como el desplazamiento se conocen sigularmente en cualquier tiempo. Todo lo que se necesita son las dos condiciones iniciales, el intervalo de tiempo desde el comienzo del movimiento, y la constante del sistema, $\omega_n$.

Consideremos una función forzante general $F(t)$, como en la Fig. 5.11, que fuerza a un sistema simple de resorte y masa. La función general $F(t)$, se puede considerar como una serie de impulsos infinitesimalmente cortos, cada uno de los cuales afecta el movimiento del sistema. Si después de un tiempo $t'$ se fuerza el sistema con un impulso infinitesimal $F(t')dt'$, del movimiento por la segunda ley de Newton, habrá un cambio infinitesimal resultante en momentum,

$$F(t')\, dt' = m\, d\dot{x} \tag{5.27}$$



Fig. 5.11




Es importante reconocer que sólo se cambiará el momentum. Si la masa no es una variable, esto significa que sólo cambiará la velocidad

$$d\dot{x} = \frac{F(t')\, dt'}{m} \tag{5.28}$$

El cambio en el desplazamiento $x$, en cualquier momento $t$, ocasionado por el cambio en momentum en cualquier otro tiempo $t'$, dependerá del intervalo de tiempo entre $t$ y $t'$, o $t - t'$. Haciendo otra vez referencia a la Ec. 5.26, por analogía, el cambio en el desplazamiento debido al impulso $F(t')dt'$, será

$$dx = \frac{d\dot{x}}{\omega_n} \text{sen } \omega_n (t - t')$$

Compárese esta afirmación con el último término de la Ec. 5.26, que es el efecto de la velocidad sobre el desplazamiento. En lugar de la velocidad inicial, $v_0$, cada impulso infinitesimal inicia un cambio en la velocidad de $d\dot{x}$. Después de un intervalo de tiempo, $t - t'$, el cambio en el desplazamiento será $dx$.

Sustituyendo para $d\dot{x}$,

$$dx = \frac{F(t')}{m\omega_n} \text{sen } \omega_n (t - t')\, dt' \tag{5.29}$$

Este es entonces el cambio en desplazamiento producido por un cambio en el momentum debido a un impulso corto $F(t')dt'$. Si existe una serie de impulsos cortos, cada impulso cambiará también el momentum y afectará al desplazamiento. El concepto de convolución consiste en que, en un sistema lineal se puede encontrar la respuesta a la función forzante general como la superposición de las respuestas a la suma de todos los impulsos individuales. Si $F(t')$ es integrable, y $x_0 = x$,

$$x = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(t') \text{sen}\, \omega_n (t - t')\, dt' \tag{5.30}$$

La Ec. 5.30 se conoce como la integral de Duhamel, y es una forma especial de la integral de convolución.

Matemáticamente, la integral de convolución se expresa en forma normal como

$$x(t)=\int_0^t F(t')G(t-t')\,dt'=F(t)*G(t) \qquad (5.31)$$

La Ec. 5.30, sen $\omega_n(t-t')$ es una forma especial de la función $G(t-t')$, válida para un sistema no amortiguado. La integral de convolución no es tan restrictiva. La variable $t'$ es simplemente fingida en tiempo.

El teorema de Borel establece que la convolución de dos funciones es la inversa del producto de sus transformadas de Laplace. Así,

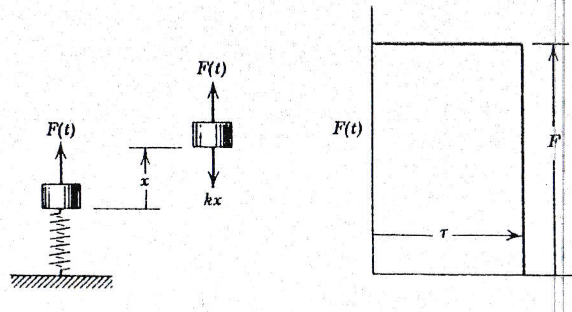
$$x(t)=F(t)*G(t)=\mathscr{L}^{-1}[f(s)\cdot g(s)]$$

Esto es de gran importancia práctica, ya que nos permite usar las transformadas de Laplace para resolver problemas de vibración transitoria.

---

### *PROBLEMA EJEMPLO 5.20*

Se aplica súbitamente una fuerza $F(t)$ a una masa $m$, que está soportada por un resorte de módulo constante $k$. Después de un periodo corto de tiempo, $\tau$, se retira la fuerza súbitamente. Durante el tiempo en el que la fuerza se encuentra en acción, ésta es una constante $F$. Determínese la respuesta del sistema para $t>\tau$. El resorte y la masa se encuentran inicialmente en equilibrio, antes de que se aplique la fuerza $F(t)$.




***Solución:***

Para cualquier tiempo $t>\tau$, la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$m\ddot{x}+kx=F[u(t)-u(t-\tau)]$$

la designación de $u(t)$ y $u(t-\tau)$ son funciones unitarias de la función de escalón de Heavyside

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$u(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$$



Las condiciones iniciales son, como antes, $x(0)=0$ y $\dot{x}(0)=0$. Transformando cada lado de la ecuación diferencial,

$$\mathscr{L}[x(t)]=x(s)$$
$$\mathscr{L}[\ddot{x}(t)]=s^2x(s)-sx(0)-\dot{x}(0)=s^2x(s)$$
$$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$
$$\mathscr{L}[u(t-\tau)]=\frac{e^{-s\tau}}{s}$$

Sustituyendo las transformadas para cada una de las funciones,

$$ms^2x(s)+kx(s)=F\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s\tau}}{s}\right)$$
$$x(s)=\frac{F(1-e^{-s\tau})}{s(ms^2+k)}$$
$$x(s)=\frac{F}{m}\left[\frac{(1-e^{-s\tau})}{s(s^2+\omega_n^2)}\right]$$

De las tablas de las transformadas de Laplace, la inversa,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)}\right]=\frac{1}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

y

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s\tau}}{s(s^2+\omega_n^2)}\right]=\frac{1}{\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-\tau)]u(t-\tau)$$

para $0<t<\tau$, la solución es

$$x(t)=\frac{F}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

y para $t>\tau$, la solución completa es

$$x(t)=\frac{F}{m\omega_n^2}\{(1-\cos\omega_n t)-[1-\cos\omega_n(t-\tau)]\}$$
$$=\frac{F}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-\tau)-\cos\omega_n t]$$

Esta es una expresión satisfactoria para el desplazamiento $x$ como función del tiempo, pero se puede aprender más por una simple manipulación trigonométrica.

Sea,

$$t=\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}$$

y

$$t-\tau=\left(t-\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}$$

Sustituyendo para $t$ y $t-\tau$, y usando la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$x=\frac{F}{m\omega_n^2}\left[2 \operatorname{sen} \omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega_n\tau}{2}\right]$$

Esta es también una expresión válida para el desplazamiento $x$ como función del tiempo, pero adicionalmente es fácil ver que $x(t) = 0$ para $t>\tau$, si

$$\frac{\omega_n\tau}{2}=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi$$

En cada uno de estos casos, la masa $m$ realizará una, dos, tres o $n$ oscilaciones completas, retornará a la posición inicial con velocidad cero, en cuyo momento se retira $F(t)$, y el sistema permanecerá en equilibrio. No es posible una vibración de estado estable.

## *PROBLEMA EJEMPLO 5.21*

Repítase el Prob. Ej. 5.20, usando la integral de convolución.

***Solución:***
Con condiciones de equilibrio, $x(0) = 0$, cuando $\dot{x}(0) = 0$, la integral de convolución es

$$x=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(t')\operatorname{sen}\omega_n(t-t')\,dt'$$

Esta se puede separar en intervalos, 0 hasta $\tau$, cuando $F(t') = F$, y $\tau$ a $t$ cuando $F(t') = 0$

$$x=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^\tau F(t')\operatorname{sen}\omega_n(t-t')\,dt'+\frac{1}{m\omega_n}\int_\tau^t F(t')\operatorname{sen}\omega_n(t-t')\,dt'$$

Integrando,

$$x=\frac{F}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t')]_0^\tau$$

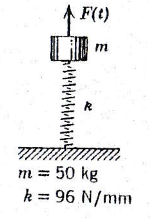
$$x=\frac{F}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-\tau)-\cos\omega_n t]$$

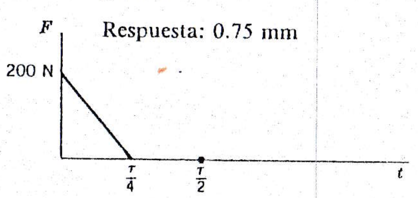
que es el mismo resultado que el del Prob. 5.17.



**PROBLEMA 5.22**
Un sistema de resorte-masa, inicialmente en reposo, se somete a un impulso triangular como se muestra. Determínese el desplazamiento $x$ de la masa en el tiempo $t = \tau/2$ en el que $\tau$ = periodo natural en segundos.

Respuesta: 0.75 mm




**PROBLEMA 5.23**
Determínese una expresión para la respuesta transitoria del sistema del Prob. 5.3, al impulso de seno verso para $t>\tau$, suponiendo que el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio.

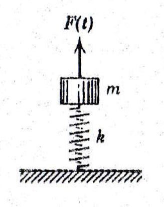
Respuesta:

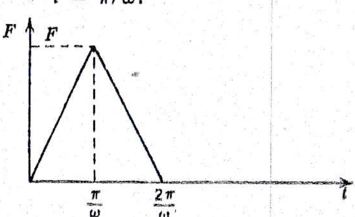
$$x=\frac{-F_0}{2k\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right)}[\cos\omega_n(t-\tau)-\cos\omega_n t]$$

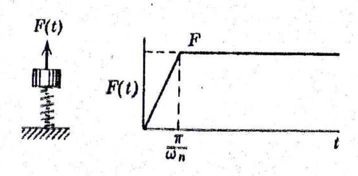
**PROBLEMA 5.24**
Usando el resultado del Prob. 5.25, demuéstrese que, para $t>\tau$, el sistema no tendrá respuesta si

$$\frac{\omega}{\omega_n}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$$

**PROBLEMA 5.25**
Analícese la respuesta transitoria de un sistema lineal con grado único de libertad, a un impulso triangular. En particular, ¿qué valores de $\omega/\omega_n$ no producirán respuesta después de $t = 2\pi/\omega_n$, y qué valores de $\omega/\omega_n$ tendrán una deflexión mínima cuando $t = \pi/\omega$?

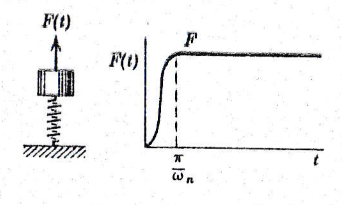





**PROBLEMA 5.26**

Determínese la respuesta, para $t>\pi/\omega_n$ de un oscilador mecánico simple, a una función forzante que tiene un tiempo de crecimiento de la mitad de un periodo, usando la integral de convolución. Compárese la amplitud de movimiento de estado estable con la del mismo sistema a una función forzante de tiempo cero de crecimiento. Supónganse condiciones iniciales de reposo.




**PROBLEMA 5.27**

Determínese la respuesta transitoria para $t>\pi/\omega$, de un sistema lineal de grado único de libertad, a la función forzante

$$F(t)=\frac{F}{2}(1-\cos\omega t)$$

para $0<t\leq\pi/\omega$, $F(t)=F$ para $t>\pi/\omega$, suponiendo condiciones iniciales de reposo.

Respuesta:

$$x=\frac{F}{2k\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\left[2-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(1-\cos\pi\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right]$$

$$+\frac{F}{k}\left[1-\cos\omega_n\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

**PROBLEMA 5.28**

Determínese la respuesta de estado estable, para el sistema del Prob. 5.26, si el tiempo de crecimiento es $\pi/\omega_n$.

**PROBLEMA 5.29**

Determínese la respuesta de estado estable para el Prob. 5.27, si el tiempo de crecimiento es de $\pi/4\omega_n$.

**PROBLEMA 5.30**

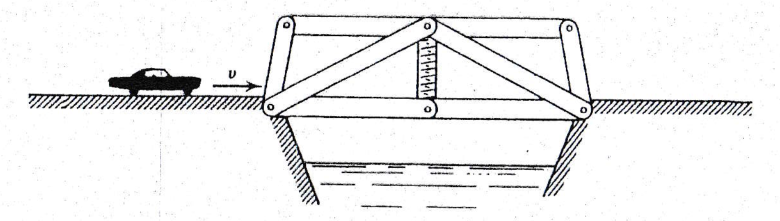
Una armadura de puente se puede simplificar y representar como una cubierta con momento de inercia $I$, y un resorte de soporte de módulo $k$. El efecto del paso de un automóvil moviéndose a través del puente, se puede aproximar al de una carga concentrada móvil de peso $W$. El momento del automóvil aumenta linealmente hasta un máximo en la mitad del claro, y después disminuye. Encuéntrese una ecuación de movimiento, usando la transformada de Laplace como una función de tiempo. *Indicio:* Nótese que el momento aplicado es $Wvt$, en donde $v$ es la velocidad del automóvil.



Respuesta: $\theta=\frac{Wv}{I\omega_n^3}[\omega_n t-\operatorname{sen}\omega_n t)$

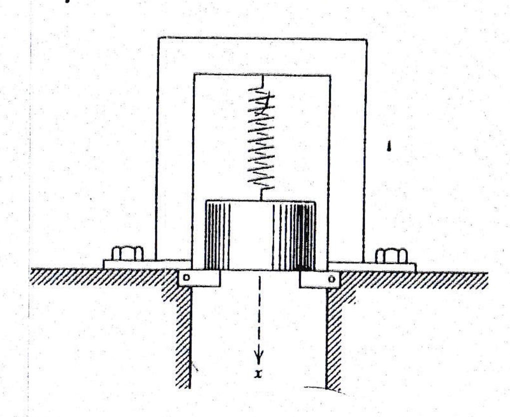
**PROBLEMA 5.31**

Repítase el Prob. 5.10, usando la transformada de Laplace.




**PROBLEMA 5.32**

Un resorte con una constante elástica $k$ y una masa $m$, descansa de modo que en la posición mostrada, el resorte se encuentra sin deformación. En $t=0$, se retiran súbitamente los soportes bajo la masa, permitiendo que ésta caiga. Haciendo referencia a la posición en $t=0$ como origen, $x(0)$, determínese la ecuación diferencial de movimiento, usando la transformada de Laplace.




**PROBLEMA 5.33**

Repítase el Prob. 5.23 usando la transformada de Laplace.

**PROBLEMA 5.34**
Repítase el Prob. 5.5, usando la transformada de Laplace.

**PROBLEMA 5.35**
Repítase el Prob. 5.6, usando la transformada de Laplace.

# SEIS

# AMORTIGUACION

## 6.1 INTRODUCCION

El proceso por el cual la vibración disminuye continuamente en amplitud, recibe el nombre de amortiguación. En la amortiguación, la energía del sistema de vibración se disipa como fricción o calor, o se transmite en forma de sonido. En el mecanismo de la amortiguación ésta puede tomar cualquiera de varias formas, y con frecuencia puede encontrarse presente al mismo tiempo más de una de ellas.

La amortiguación fluida puede ser *viscosa* o *turbulenta*. En la amortiguación viscosa, la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad. En la amortiguación turbulenta, la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad. En la *fricción seca* o amortiguación de *coulomb*, la fuerza de amortiguación es constante. Esta se causa por la fricción cinética entre superficies deslizantes secas. La *amortiguación sólida* o *amortiguación histerésica* se ocasiona por la fricción interna o histéresis, cuando se deforma un cuerpo sólido. La amplitud bajo esfuerzo es una medida de la amortiguación sólida.

El mecanismo de amortiguación más comúnmente usado es el de la amortiguación viscosa, en el cual la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad. Estrictamente hablando, esto sólo es válido para una amortiguación como la causada por el flujo laminar de un fluido viscoso a través de una ranura; por ejemplo, en un absorbechoques o amortiguador, alrededor de un émbolo dispuesto en un cilindro, o en la oscilación de un muñón de flecha dentro de un cojinete. En cada uno de estos casos, la constante de proporcionalidad depende de la viscosidad absoluta del fluido, el área superficial, y el espesor de la película de fluido. Todos estos factores se pueden hacer constantes para un conjunto dado de condiciones físicas. Estas normas son casi los únicos ejemplos prácticos de amortiguación viscosa. No obstante,

otras formas de amortiguación se aproximan a la amortiguación viscosa, si las fuerzas de disipación son pequeñas. Lord Rayleigh hizo esta aproximación cuando utilizó la amortiguación viscosa para aproximar los efectos combinados de la amortiguación del aire y la histéresis en un diapasón. El uso de la amortiguación viscosa tiene la ventaja de linealizar la ecuación de movimiento. Si las fuerzas disipativas no son pequeñas, se puede introducir un error considerable al suponer que la amortiguación es viscosa cuando ésta no lo es.

## 6.2 AMORTIGUACION VISCOSA

En la Fig. 6.1 se ha aumentado un recipiente de amortiguación a un sistema de grado único de libertad que antes consistía sólo de resorte y masa. Un recipiente de amortiguación consiste de un émbolo que ajusta con soltura dentro de un cilindro lleno de un fluido real, por ejemplo, agua o aceite. El émbolo está rígidamente conectado a la masa $m$, pero idealmente la masa del émbolo es despreciable. El émbolo tiene un ajuste flojo de manera que el fluido puede fluir alrededor del émbolo, de una lado hacia otro del mismo, a través del claro. El flujo será porporcional a la diferencia de presiones, a la viscosidad del fluido y al régimen de cambio en el tiempo del volumen, que es la velocidad del émbolo. Todo lo anterior se agrupa en una constante de amortiguación, de proporcionalidad tal, que la fuerza de amortiguación es

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{v} \qquad (6.1)$$

El signo negativo indica que la fuerza de amortiguación es opuesta en dirección a la velocidad. La constante de proporcionalidad, $c$, es la constante de amortiguación. Las unidades de ésta son N·s/m, o impulso por unidad de desplazamiento, o kg/s.

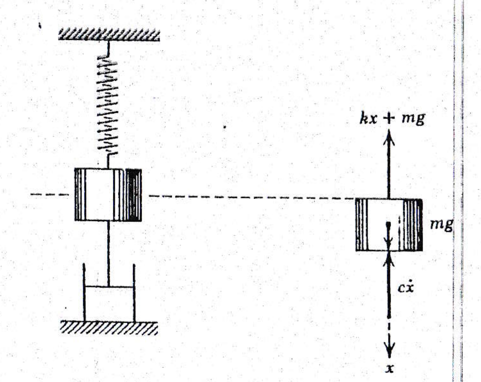


**Fig. 6.1**



La ecuación de movimiento para un grado único de libertad con resorte, masa y amortiguador, es

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (6$$

Esta es una ecuación diferencial familiar lineal, de segundo orden, con co cientes constantes. Para la solución de ésta, la función exponencial de pru $Ce^{rt}$, da una ecuación característica,

$$r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

cuyas raíces son complejas,

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \qquad (6$$

La solución general para el desplazamiento es entonces,

$$x = e^{-(c/2m)t}\left[C_1 e^{+\sqrt{(c^2/4m^2)-(k/m)}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{(c^2/4m^2)-(k/m)}\,t}\right] \qquad (6$$

$C_1$ y $C_2$ son otra vez constantes arbitrarias que dependen de las condicio de movimiento iniciales. Debe haber dos constantes arbitrarias en la solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

Matemáticamente, ésta es una ecuación exponencial, pero físicament puede describir la curva desplazamiento-tiempo como compuesta de tres curvas distintas, dependientes de si el radical $\sqrt{(c^2/4m^2)-(k/m)}$ es real, cero o imaginario.

**Caso I.** $c^2/4m^2 > k/m$. En este caso, el radical es real, y el movimiento del sistema se domina por la amortiguación. En el desplazamiento y liberación, el sistema se aproximará exponencialmente al equilibrio. No ocurre oscilación y, te camente, el sistema nunca retornará a su posición original.

Son ejemplos de sistemas elásticos fuertemente amortiguados, para los cuales se aplica este movimiento, los mecanismos de retroceso, los de ci automático de puertas comunes. Este movimiento, expresado en la Ec. 6. muestra en la Fig. 6.2a (Pág. 200).

**Caso II.** $c^2/4m^2 = k/m$. En este caso, Fig. 6.2b, el radical vale cero, y se dice qu sistema está críticamente amortiguado. El valor de la constante de am guación para el cual el sistema se halla críticamente amortiguado, se llama la *constante crítica de amortiguación*. Este se indica por la notación de la con stante de amortiguación con un subíndice, $c_{cr}$. Este valor es función estr de las constantes del sistema, $m$ y $k$.

$$c_{cr}^2 = 4mk$$

$$c_{cr} = \sqrt{4mk} = 2m\omega_n \qquad (6.5)$$

## 6.4 ENERGIA DISIPADA EN LA AMORTIGUACION VISCOSA

Es importante, en esta etapa, considerar la energía disipada por ciclo en el movimiento armónico viscosamente amortiguado. El régimen de disipación de energía con el tiempo, es

$$\frac{dU}{dt}=f\frac{dx}{dt}=c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{6.13}$$

Para movimiento armónico simple, $x = X$ sen $\omega t$, la energía disipada a través de un ciclo completo será,

$$\Delta U=\int_0^{2\pi/\omega} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=\int_0^{2\pi} cX^2\omega\cos^2\omega t\, d(\omega t)$$
$$\Delta U=\pi c\omega X^2 \tag{6.14}$$

Alternativamente, si se hubiera graficado la fuerza como una función del desplazamiento, cuando $x = X$ sen $\omega t$,

$$f=c\left(\frac{dx}{dt}\right)=c\omega X\cos\omega t$$

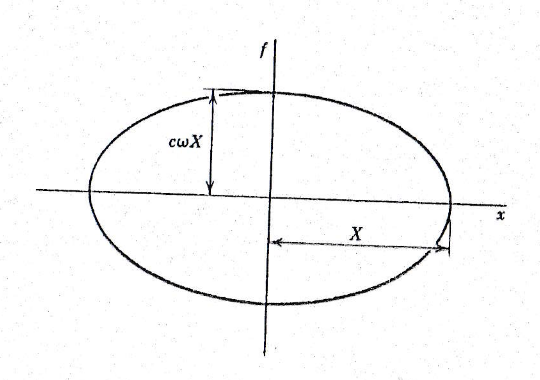
habríamos obtenido una elipse, que se muestra en la Fig. 6.5

$$\left(\frac{x}{X}\right)^2+\left(\frac{f}{c\omega X}\right)^2=1 \tag{6.15}$$

El área de la elipse representa la energía disipada por ciclo, $\Delta U = \pi c\omega X^2$.

La energía disipada es proporcional al cuadrado de la amplitud de movimiento. Deberá notarse que éste no es un valor constante para una cantidad dada de amortiguación y amplitud, ya que la energía disipada es también función directa de la frecuencia.

**Fig. 6.5**






## 6.5 AMORTIGUACION ESPECIFICA

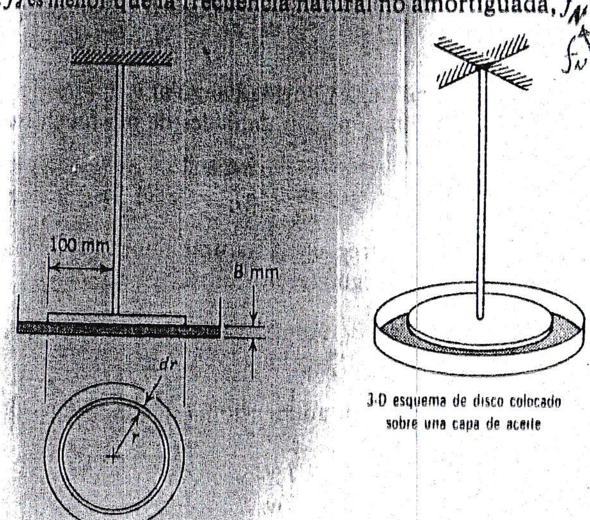
La capacidad de amortiguación específica, es la parte fraccionaria de la energía total del sistema vibratorio, que se disipa durante cada ciclo de movimiento $\Delta U/U$. Para un sistema simple, con una coordenada generalizada, el factor de amortiguación específica se relaciona directamente con el decremento logarítmico y la relación adimensional de amortiguación.

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{\pi c\omega X^2}{\frac{1}{2}kX^2}\approx 2\delta\approx 4\pi\zeta \tag{6.16}$$

Se puede expresar la energía total $U$, ya sea como la energía potencial máxima, $\frac{1}{2}kX^2$, o como la energía cinética máxima, $\frac{1}{2}mX^2\omega^2$, siendo las dos aproximadamente iguales para una amortiguación leve. La amortiguación específica no se usa con frecuencia en las vibraciones mecánicas, ya que tiene una definición útil sólo para amortiguación leve, ($\delta < 0.01$). No obstante, es útil para comparar la capacidad de amortiguación de los materiales de ingeniería.

***PROBLEMA EJEMPLO 6.1***

Un viscosímetro simple consiste de un disco de acero, delgado, de 200 mm de diámetro y 2,5 mm de espesor, suspendido de un alambre de acero en forma de péndulo torsional. En operación, la cara inferior del disco toca apenas una capa de aceite de 8 mm dispuesta en una bandeja poco profunda. Cuando el péndulo se encuentra en contacto con el aceite, la frecuencia natural amortiguada $f_d$ es menor que la frecuencia natural no amortiguada, $f_N$, que el péndu-




3-D esquema de disco colocado sobre una capa de aceite

lo tiene cuando oscila libremente en el aire. Comenzando con la ley de Newton de la viscosidad $F = \mu A(dv/dh)$ en la que $\mu$ es la viscosidad, $A$ es el área de contacto y $dv/dh$ es el gradiente de velocidad en el aceite, determínese la expresión para la viscosidad del aceite en términos de las frecuencias naturales, amortiguada y no amortiguada. Resuélvase para la viscosidad en el caso en el que $f_d = 1.15$ Hz y $f_n = 1.20$ Hz. Despréciense los efectos de borde en el disco.

***Solución:***

La resistencia al avance viscosa sobre un elemento de área, consistente de un anillo delgado de radio $r$, es

$$dF = \mu(2\pi r\, dr)\frac{dv}{dh}$$

Se seleccionó un anillo delgado como nuestro elemento, ya que la velocidad de todos los puntos en el mismo radio $r$, será la misma; $v = v\dot{\theta}$. Si suponemos un gradiente lineal de velocidad en el aceite,

$$\frac{dv}{dh} = \frac{r}{h}\,\dot{\theta}$$

el momento de la resistencia al avance $dF$, es

$$dT = dFr = r\mu(2\pi r\, dr)\left(\frac{r}{h}\right)\dot{\theta} = \frac{2\pi\mu\dot{\theta}}{h}\, r^3\, dr$$

Integrando sobre la cara de todo el disco, el par de torsión viscoso, que tiende a amortiguar el movimiento, es

$$T = \int_0^R \frac{2\pi\mu}{h}\,\dot{\theta} r^3\, dr = \frac{\mu\pi R^4}{2h}\,\dot{\theta}$$

Esta es una función lineal de la velocidad angular $\dot{\theta}$. La fracción $\mu\pi R^4/2h$, es el coeficiente de amortiguación, con unidades de newton-metro-segundos.

$$c = \frac{\mu\pi R^4}{2h}$$

La Ec. 6.9 establece que la frecuencia natural amortiguada, es menor que la frecuencia natural no amortiguada, por un factor de $\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Resolviendo para $\zeta$, la relación adimensional de amortiguación

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{f_d}{f_n}\right)^2}$$



El coeficiente crítico de amortiguación se define en términos de la frecuencia natural y la masa inercial

$$c_{cr} = 2I\omega_n = 4\pi I f_n$$

Sustituyendo para el coeficiente de amortiguación, se puede encontrar la viscosidad del aceite en términos de $f_n$ y $f_d$ y de las constantes físicas $I$, $h$ y $R$

$$\mu = 8\,\frac{Ihf_n}{R^4}\sqrt{1-\left(\frac{f_d}{f_n}\right)^2}$$

Para este caso particular

$$f_d = 1.15 \text{ Hz}$$
$$f_n = 1.20 \text{ Hz}$$
$$R = 100 \text{ mm}$$
$$I = \tfrac{1}{2}\pi(0.1)^2(0.0025)(7.85)(0.1)^2 = 3.08\times10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

y por tanto,

$$\mu = 8\,\frac{(3.08\times10^{-6})(1.2)(0.008)}{(0.1)^4}\sqrt{1-\left(\frac{1.15}{1.20}\right)^2} = 1.93\times10^{-6}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

o, 790 reyns.

---

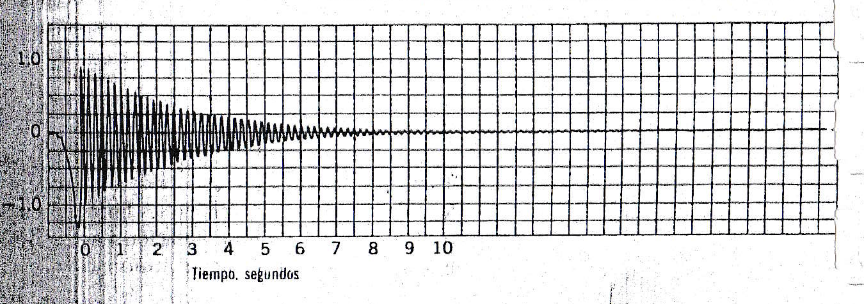
**PROBLEMA 6.2**

¿Cuál es la diferencia para una relación de amortiguación de 0.2, entre las frecuencias naturales amortiguada y no amortiguada?

Respuesta: 2%

**PROBLEMA 6.3**

Grafíquese una curva de la doble amplitud de movimiento, como función del número de ciclos transcurrido, para los datos mostrados. Hágase la gráfica sobre papel semilogarítmico. Determínense el decremento logarítmico y el factor de amortiguación.



**PROBLEMA 6.4**

Un émbolo de 2 kg soportado por un resorte helicoidal, vibra libremente con una frecuencia natural de 125 ciclos por minuto. Cuando oscila dentro de un cilindro lleno de aceite, la frecuencia de oscilación libre se reduce a 120 ciclos por minuto. Determínese la constante $c$ de amortiguación.

Respuesta: 14.33 kg/s

**PROBLEMA 6.5**

¿Cuál es la relación entre las amplitudes sucesivas de vibración para un sistema mecánico simple, si la relación de amortiguación viscosa es de $\zeta = 0.5$?

Respuesta: 37.5:1

**PROBLEMA 6.6**

Muchos dispositivos están provistos de un aparato de amortiguación viscosa ajustable. En uno de tales dispositivos, la relación entre amplitudes sucesivas es de 10:1. Si se duplica la cantidad de amortiguación, ¿cuál será entonces la relación entre amplitudes sucesivas?

**PROBLEMA 6.7**

Si la relación entre amplitudes sucesivas de una vibración libre amortiguada es 2:1, ¿cuál es el decremento logarítimico y el factor de amortiguación $\zeta$?

Respuesta: $\delta = 0.693$; $\zeta = 0.110$

**PROBLEMA 6.8**

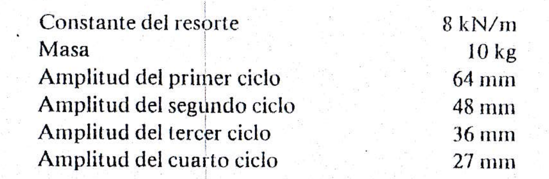
Un diseño de amortiguador de choques debe limitarse a un 10% de sobrecarrera cuando se desplaza desde el equilibrio y se libera. Determínese la relación de amortiguación $\zeta$ necesaria.

Respuesta: $\zeta = 0.591$

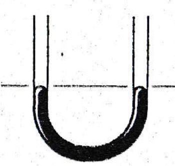
**PROBLEMA 6.9**

Determínese, para las vibraciones libres de un sistema, la constante de amortiguación viscosa del mismo, $\zeta$. Se conoce la siguiente información:





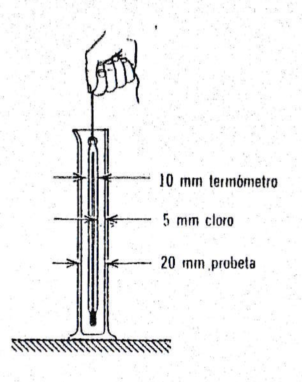
| | |
|---|---|
| Constante del resorte | 8 kN/m |
| Masa | 10 kg |
| Amplitud del primer ciclo | 64 mm |
| Amplitud del segundo ciclo | 48 mm |
| Amplitud del tercer ciclo | 36 mm |
| Amplitud del cuarto ciclo | 27 mm |



**PROBLEMA 6.10**

Un manómetro consiste de un tubo de 15 mm de diámetro que contiene una columna de aceite SAE 5, de 0.25 m de longitud total y gravedad específica de 0.8 a 15°C ($\mu$ = 35 centipoises o 35 mPa·). Calcúlese el factor de amortiguación $\zeta$ para el manómetro. *Indicio:* De la ley de Poiseuille para el flujo a través de un tubo capilar, $v_{prom} = \Delta PA/8\pi\mu l$.

Respuesta: $\zeta = 0.351$




**PROBLEMA 6.11**

Un termómetro de vidrio, de mercurio, de 0.25 mm que tiene una masa de 28 g en el aire, está suspendido por medio de una banda de hule y sumergido por completo en una probeta esbelta llena de un aceite liviano. Cuando se le desplaza, oscila con una frecuencia de un ciclo/segundo y el movimiento se amortigua desde una amplitud de 40 mm hasta 10 mm en dos ciclos.

(a) ¿Cuál es el decremento logarítmico?

(b) ¿Cuál es la relación adimensional de amortiguación, $\zeta$?

(c) Calcúlese la viscosidad $\mu$, del aceite.

*Indicio:* Recuérdese que la ecuación de Newton para el movimiento viscoso es $F = \mu A(dv/dt)$; para un gradiente lineal de velocidad $F = \mu A(v/h)$.

**PROBLEMA 6.12**

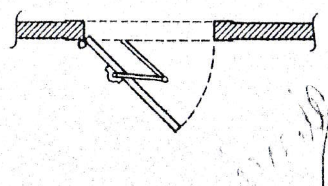
Un sistema críticamente amortiguado, consiste de un resorte con constante de 250 N/m, que soporta una masa de 2 kg. La masa tiene un desplazamiento inicial de 100 mm y se le da una velocidad inicial de 5 m/s en dirección opuesta a la del desplazamiento. Dibújese un diagrama desplazamiento-tiempo, que muestre el tiempo $t$ después de la liberación, en el que la masa pasa por la posición de equilibrio, y el máximo lanzamiento.

**PROBLEMA 6.13**

Un dispositivo de prueba consiste de un cilindro neumático que acelera a un conjunto de émbolo de 5 kg, hasta una velocidad de 30 m/s. En este instante, se desacelera el conjunto, conectándolo a un resorte y a un amortiguador. El resorte tiene un módulo de 50 N/mm, y el amortiguador está inicialmente amortiguado con una constante de 1 000 N·s/m. Determínese el desplazamiento máximo del émbolo después de que éste hace contacto con el resorte y el amortiguador y el tiempo en el que ocurre este acoplamiento.

Respuesta: 0.11 m





**PROBLEMA 6.14**

Una puerta de placa, de 2 m de altura, 0.75 m de ancho, 40 mm de espesor y con una masa de 36 kg, está provista de un cierrapuertas automático. La puerta se abre contra un resorte de torsión con módulo de 10 N·m/radián. Determínese la amortiguación necesaria para amortiguar críticamente la oscilación de retorno de la puerta. Si la puerta se abre 90° y se libera, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que la misma se encuentre a 1° de su posición de cierre?

Respuesta: $t = 9.4$ s

## 6.6 AMORTIGUACION HISTERESICA

Si hubiéramos considerado un amortiguador viscoso dispuesto en paralelo con un resorte, como en la Fig. 6.6a, la fuerza total $\mathbf{f}_1$, habría sido la suma de la fuerza de amortiguación y la fuerza del resorte,

$$\mathbf{f}_t = k\mathbf{x} + c\dot{\mathbf{x}} \tag{6.17}$$

Si hubiéramos usado otra vez movimiento armónico simple, $x = X \operatorname{sen} \omega t$, la componente de la fuerza total en la dirección-$x$, habría sido

$$f_t = kX \operatorname{sen} \omega t + c\omega X \cos \omega t$$

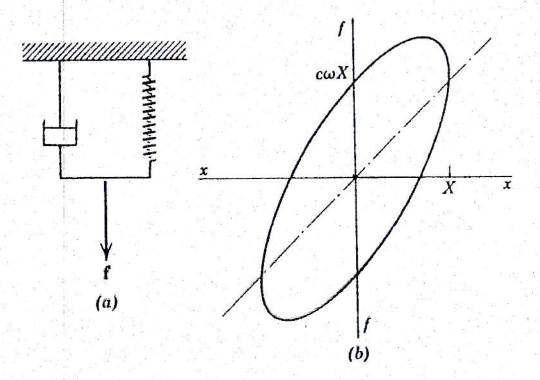
Graficando la fuerza como función del desplazamiento en la dirección-$x$, se obtiene la elipse oblicua de la Fig. 6.6b

$$\left(\frac{x}{X}\right)^2 + \left(\frac{f_t - kx}{cX\omega}\right)^2 = 1$$

para la cual, la fuerza expresada en términos de las constantes del sistema, el



**Fig. 6.6**




desplazamiento máximo es

$$f_t = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2}$$

La energía disipada para un ciclo de movimiento es

$$\Delta U = \int_0^{2\pi/\omega} f_t\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_0^{2\pi/\omega} kx\left(\frac{dx}{dt}\right) dt + \int_0^{2\pi/\omega} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} kX^2\omega \operatorname{sen}\omega t \cos \omega t \, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} cX^2\omega \cos^2 \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \pi c \omega X^2$$

que es idéntica a la Ec. 6.14. Esto es lógico, ya que la fuerza del resorte no realizará trabajo neto a través de un ciclo completo, o un número entero de ciclos. Si no existiera amortiguación, la curva fuerza-deflexión sería una sola línea $f = kx$ en lugar de una figura cerrada.

Usando la amortiguación viscosa para representar la amortiguación interna de los materiales o la amortiguación de una estructura construida por armado, se incurre en un serio error. La energía disipada por ciclo en la amortiguación viscosa, aumenta con la frecuencia. La *amortiguación viscosa,* la *amortiguación estructural,* o *amortiguación histerésica,* son términos todos que se usan para denotar la amortiguación interna, y la energía disipada por ciclo en la amortiguación interna es, en forma invariable, independiente de la frecuencia, o disminuye levemente al aumentar la frecuencia.

Existen razones físicas por las cuales la frecuencia natural amortiguada de un espécimen, afecta el valor aparente del decremento. Una de ellas es el efecto térmico de la fatiga elástica repetida. Un esfuerzo de tensión súbitamente aplicado, ocasiona un leve enfriamiento del material al expandirse éste. Si una porción de una estructura se esfuerza diferentemente de otra, como ocurre en la flexión, habrá un flujo de calor a través de los límites granulares,

que disipará energía y que ocasionará amortiguación. A altas frecuencias, no se da tiempo para que el calor fluya y la amortiguación es menor.

En la introducción aprendimos que si las fuerzas histerésicas son pequeñas, la amortiguación viscosa constituye una buena aproximación al mecanismo real de disipación de energía. La ventaja de usar una ecuación linealizada de movimiento, contrarresta cualesquiera compromisos necesarios para hacer la aproximación. Hemos llegado ahora a una conclusión contradictoria a nuestras observaciones físicas y la amortiguación viscosa no es una aproximación satisfactoria a un mecanismo de amortiguación.

En los primeros años de la investigación conducente al diseño de las turbinas de vapor de alta presión, la capacidad de amortiguación fue una variable que se estudió muy a fondo. El vapor de alta presión descargado de las toberas, significa grandes fuerzas de impulso sobre los álabes de la turbina. Los primeros álabes se destruían por fatiga en lapsos de horas. La amortiguación proporcionó un medio de disminuir el número de oscilaciones de los álabes. La capacidad de amortiguación se aumentó en veinte veces, cambiando la composición del material de los álabes. Se notó, además, que el factor adimensional de amortiguación aumentaba con la temperatura y disminuía con la frecuencia. Esta última observación estaba en oposición total con la teoría aceptada de la amortiguación viscosa. La Fig. 6.7 muestra la variación física del factor de amortiguación adimensional con la frecuencia, tomada de la literatura precursora. Se ha eliminado el valor numérico de los parámetros de amortiguación, para evitar la colocación de una valor absoluto en la información.

El dispositivo más sencillo utilizable para representar la amortiguación interna, es suponer que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad, e inversamente proporcional a la frecuencia. Este tipo de amortiguación se denomina amortiguación histerésica, ya que se puede relacionar en forma

Fig. 6.7

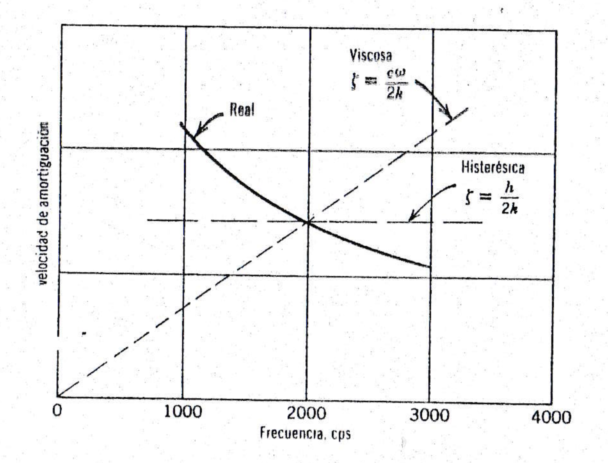
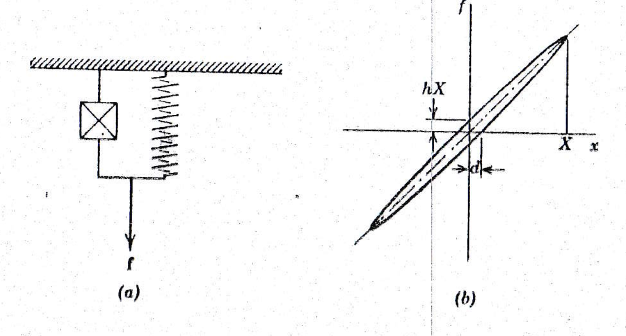





Fig. 6.8




directa con la curva de histéresis. Se usa una constante $h$ en lugar del producto $c\omega$, y se le denomina la *constante de amortiguación histerésica*. Sus unidades para $h$ son las mismas que las de la constante elástica N/mm, o N/m.

$$\mathbf{f}_t = k\mathbf{x} + \frac{h}{\omega}\dot{\mathbf{x}} \tag{6.18}$$

El símbolo usual para la amortiguación histerésica, es una caja cruzada. Retrocediendo sobre nuestros pasos, podremos ver que reemplazando $c\omega$ por $h$, la energía disipada por ciclo es dependiente sólo de la constante $h$ y de la amplitud de movimiento.

$$\Delta U = \pi h X^2 \tag{6.19}$$

Haciendo referencia a la Fig. 6.8, la constante de amortiguación histerésica constituye una medida de la gaza de histéresis y una propiedad del material o de la estructura. La intersección de la gaza de histéresis sobre el eje de fuerzas, depende del valor de la constante $h$ de amortiguación histerésica y el desplazamiento máximo $X$. Si llamamos $d$ a la intercepción de la gaza de histéresis sobre el eje de desplazamientos,

$$\frac{h}{k} = \frac{d}{\sqrt{X^2 - d^2}} \approx \frac{d}{X} \tag{6.20}$$

Para una amortiguación leve, el valor de $d$ es pequeño en comparación con $X$ y es suficiente para evaluar la constante de amortiguación histerésica por la relación aproximada de la Ec. 6.20. Esto es permisible, puesto que no se usa la amortiguación histerésica cuando, por varias razones, es evidente una deformación plástica grande.

La respuesta de vibración libre de un sistema con amortiguación histerésica, no es diferente de la respuesta de vibración libre de un sistema con amorti-

guación viscosa. El decremento logarítmico histerésico se puede definir de manera similar a la del decremento logarítmico viscoso.

$$\delta = \frac{\pi h}{m\omega_d^2} \approx \pi \frac{h}{k} \tag{6.21}$$

Llamando $\zeta$ a la relación entre la amortiguación histerésica real y la cantidad necesaria para proveer amortiguación crítica,

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \approx \frac{h}{2k} \tag{6.22}$$

Esta es constante, lo que no reproduce por completo la información de la Fig. 6.7, pero se adapta a ella mejor que una función linealmente creciente con la frecuencia.

Una nota adicional, en la aplicación al diseño de álabes de turbina, para geometrías similares, los álabes más pequeños presentan una amortiguación inherente más baja, debido a sus más altas frecuencias naturales. Esta es otra razón por la cual no tiene significado establecer valores absolutos para el decremento logarítmico de los materiales de ingeniería. El decremento logarítmico es una función de la geometría.

En ciertos materiales reales, el esfuerzo no es proporcional a la deformación, y al energía disipada en cada ciclo no es proporcional al cuadrado de la amplitud de movimiento (esfuerzo). Son ejemplos de estos los materiales inelásticos tales como el hule, y otros como el hierro colado, en los que el mecanismo de amortiguación no es termoelástico. En el hierro colado, lo anterior se debe al deslizamiento de unos granos sobre otros facilitado por la ayuda del carbón libre existente entre los límites de esos granos. Una relación empírica para la energía disipada en cada ciclo, es

$$\Delta U = \pi h X^m \tag{6.23}$$

$m$ es un exponente empírico. Si $m = 2$, la respuesta del sistema no se puede distinguir de la amortiguación viscosa. Si $m \neq 2$, entonces la capacidad de amortiguación específica será por sí misma una función de la amplitud.

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\pi h X^m}{\frac{1}{2}kX^2} = 4\pi\zeta X^{m-2}$$

En la mayor parte de los materiales, $m > 2$, lo que significa que la capacidad específica de amortiguación aumentará con la amplitud de movimiento.

## 6.7 RIGIDEZ COMPLEJA

En ocasiones, se usa el término rigidez compleja para la amortiguación estructural. Esto constituye un expediente matemático simple, pero que es difícil de definir físicamente. Si el movimiento es armónico, y ésta es una suposición necesaria, $x = Xe^{i(\omega t + \phi)}$ y $\dot{x} = i\omega X e^{i(\omega t + \phi)} = i\omega x$. Sustituyendo en la Ec. 6.2, la ecuación de movimiento se vuelve



$$m\ddot{x} + k\left(1 + \frac{h}{k}i\right)x = 0 \tag{6.24}$$

La cantidad compleja $[1 + (h/k)i]$ es la *rigidez compleja* del sistema. Esta representa al mismo tiempo, tanto las fuerzas elásticas, como las de amortiguación. Existen ventajas en el suelo de esta terminología, si el estudiante está familiarizado con la notación compleja, y ésta es particularmente adaptable para vectores, pero la rigidez compleja no tiene significado físico en el mismo sentido de ingeniería que el módulo elástico.

### *PROBLEMA EJEMPLO 6.15*

Cuando se carga y descarga una estructura armada, la información registrada produce la curva carga deflexión mostrada a continuación. Calcúlense, a partir de esta información, el coeficiente de amortiguación histerésica $h$, el decremento logarítmico, $\delta$, y la relación de amortiguación, adimensional, $\zeta$.

***Solución:***
El área encerrada en la curva de histéresis, es la energía disipada durante cada ciclo completo. Contando cuadrados, ésta se aproxima a 36 N·m

$$\Delta U = \pi h X^2 = 36 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Para una deflexión máxima de 20 mm, el coeficiente de amortiguación histerésica $h$, es

$$h = \frac{\Delta U}{\pi X^2} = \frac{36}{\pi(0.02)^2} = 28.65 \text{ N/mm}$$

La pendiente de la curva fuerza-deflexión es $k = 250$ N/mm, y el decremento logarítmico y la relación adimensional de amortiguación son:

$$\delta = \pi \frac{h}{k} = 0.36$$

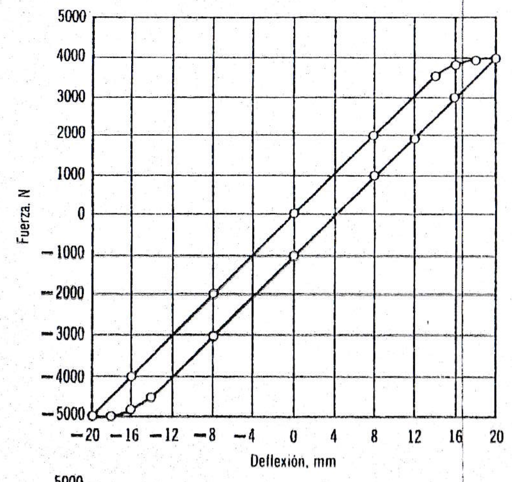
$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{h}{k} = 0.0575$$

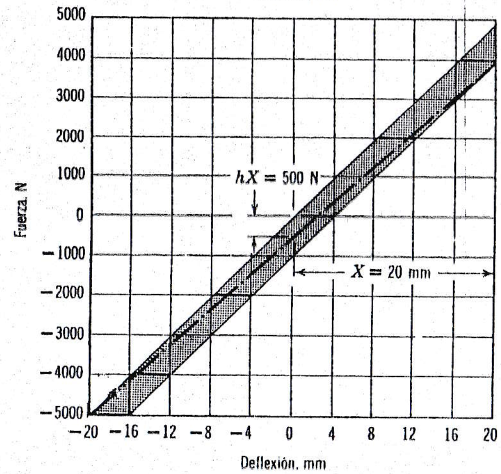
Todos estos cálculos se basan en la suposición de que la amortiguación

Si se hubiera usado la intersección para determinar $h$, y la simetría

terminar la constante elástica

| Carga, N | Deflexión, mm |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2000 | 8 |
| 3500 | 14 |
| 3850 | 16 |
| 4000 | 18 |
| 4000 | 20 |
| 3000 | 16 |
| 1000 | 8 |
| −1000 | 0 |
| −3000 | −8 |
| −4500 | −14 |
| −4850 | −16 |
| −5000 | −18 |
| −5000 | −20 |
| −4000 | −16 |
| −2000 | −8 |




$$hX = 500 \text{ N}$$
$$k = 225 \text{ N/mm}$$

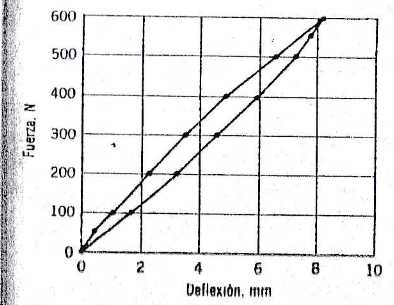
Para $X$ = 20 mm, $h$ = 25 N/mm

$$\delta = \pi \frac{h}{k} = 0.349$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{h}{k} = 0.0555$$

cuyos valores están muy cercanos a los antes obtenidos.






**PROBLEMA 6.16**

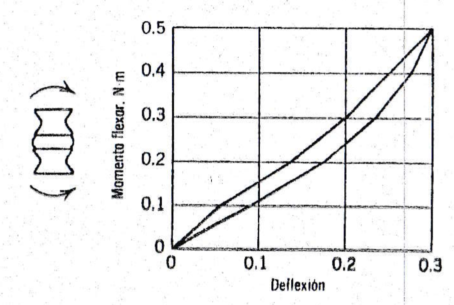
Por medio de mediciones experimentales, la información fuerza-deflexión para una estructura, muestra la gaza de histéresis indicada. Calcúlese el coeficiente $h$ de amortiguación histerésica, $h$.

| *Fuerza*, N | *Deflexión*, mm |
|---|---|
| 0 | |
| 50 | 0.5 |
| 100 | 1.1 |
| 200 | 2.3 |
| 300 | 3.7 |
| 400 | 5.1 |
| 500 | 6.6 |
| 600 | 8.2 |
| 550 | 7.7 |
| 500 | 7.1 |
| 400 | 5.9 |
| 300 | 4.6 |
| 200 | 3.3 |
| 100 | 1.7 |
| 0 | 0 |

**PROBLEMA 6.17**

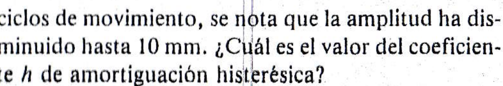
Adelante se muestran los datos de una prueba de flexión, de laboratorio, para un disco intervertebral. Calcúlese el coeficiente de amortiguación histerésica.

Respuesta: $h$ = 3.29 N·m/radián




**PROBLEMA 6.18**

Un resorte helicoidal, con módulo de 0.50 N/m, soporta una masa de 1 kg. Se da a la masa una deflexión inicial de 20 mm y se la libera. Después de 200


ciclos de movimiento, se nota que la amplitud ha disminuido hasta 10 mm. ¿Cuál es el valor del coeficiente $h$ de amortiguación histerésica?

Respuesta: $h = 0.055$ N/m


**PROBLEMA 6.19**

Cuando se carga y se descarga una estructura elástica simple, la curva fuerza-deflexión muestra una gaza de histéresis. Determínese la relación de amortiguación si la estructura soporta una masa de 1 kg.

Respuesta: $\zeta = 0.05$

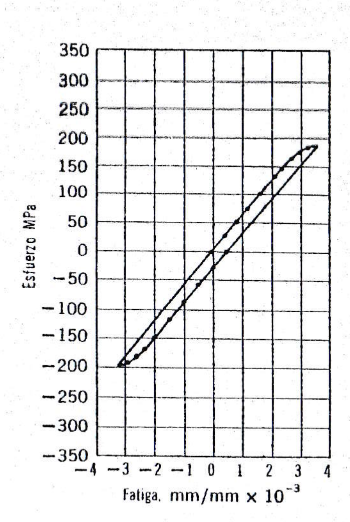
**PROBLEMA 6.20**

La curva de vibración amortiguada del Prob. 6.3, se tomó de una mesa de vibración experimental consistente de una masa única soportada sobre cuatro muelles que servían como patas. La velocidad de la cinta fue de 10 mm por segundo. La mesa tenía un grado único de libertad, y una masa de 50 kg. Determínese la constante $h$ de amortiguación histerésica.

**PROBLEMA 6.21**

Se muestran los datos reales de las características esfuerzo-fatiga para el aluminio. Determínese la constante de amortiguación histerésica para la información suministrada.

Respuesta: $h = 4.2 \times 10^9$ N·/m²





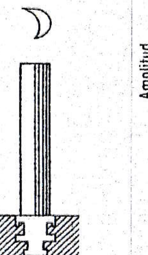

**PROBLEMA 6.22**

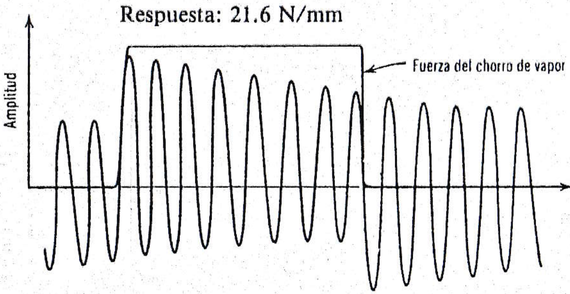
Si un marco espacial se deforma 2 mm para una carga de 500 N aplicada de manera que la deflexión se aproxima a la primera forma de modo, para la cual la frecuencia resonante es de 10 Hz, y $\zeta = 0.1$, determínese el coeficiente de amortiguación histerésica.

**PROBLEMA 6.23**

Se muestra un diagrama simplificado de la respuesta de un álabe de turbina de vapor al pasar éste a través del chorro de la turbina. Este álabe particular es un álabe de reacción de 100 mm de longitud y masa de 0.5 kg, con una frecuencia natural amortiguada de 600 Hz. Para el propósito de este problema, se puede suponer que la sección transversal del álabe es uniforme. Calcúlese el coeficiente $h$ de amortiguación histerésica.

Respuesta: 21.6 N/mm



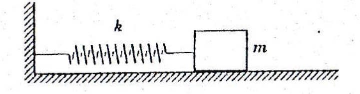


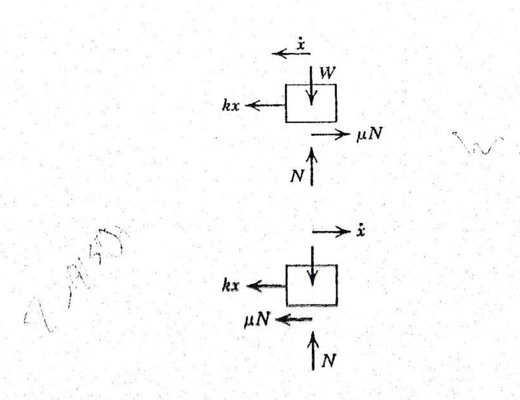

## 6.8 AMORTIGUACION DE COULOMB

El tercer tipo importante de amortiguación, es el de la amortiguación de Coulomb o amortiguación por fricción seca. Este se denomina a veces amortiguación constante, ya que la fuerza de amortiguación es independiente del desplazamiento y de sus derivadas y depende sólo de las fuerzas normales existentes entre las superficies deslizantes. No obstante, la dirección de la fuerza de fricción se opone al movimiento y el signo de la fuerza de fricción cambiará cuando cambie la dirección de movimiento. Esto hace necesarias dos soluciones para la ecuación de movimiento, una válida para una de las direcciones y la otra válida para cuando se invierte el movimiento. Individualmente, las soluciones son lineales, pero son discontinuas después de cada medio ciclo.

Haciendo referencia a la Fig. 6.9, para el medio ciclo de movimiento de derecha a izquierda, la ecuación de movimiento, $\Sigma F = m\ddot{x}$ se hace

Fig. 6.9




$$-kx + \mu N = m\ddot{x}$$

la solución es

$$x = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad (6.25a)$$

Si el movimiento es de izquierda a derecha, la ecuación de movimiento para este medio ciclo se hace

$$-kx - \mu N = m\ddot{x}$$

para la cual la solución es

$$x = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \qquad (6.25b)$$

$A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales de cada medio ciclo sucesivo. Se usan diferentes subíndices para mostrar que las constantes no son las mismas. El factor $\mu N/k$ es una constante que es el desplazamiento virtual del resorte bajo la fuerza de fricción $\mu N$, si ésta se aplicara como una fuerza estática.

Para cada medio ciclo, el movimiento es armónico y la curva desplazamiento-tiempo es una curva medio senoidal pura, en la que la posición de equilibrio cambia cada medio ciclo de $+\mu N/k$ a $-\mu N/k$.

Estudiemos, como ejemplo de movimiento bajo influencia de la fricción seca, el movimiento del sistema simple de la Fig. 6.9, comenzando con ciertas condiciones iniciales dadas y continuando hasta que el movimiento cesa.

En el momento $t = 0$, se desplaza la masa $m$ en una distancia $x(0) = X_0$ y se la libera desde el reposo, de tal modo que $\dot{x}(0) = 0$. Se pueden evaluar ahora explícitamente $A_1$ y $B_1$ a partir de la Ec. 6.25a



$$A_1 = X_0 - \frac{\mu N}{k} \quad \text{y} \quad B_1 = 0$$
$$x = \left(X_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad (6.26a)$$

Esta es una curva cosenoidal desplazada en la dirección positiva en una cantidad $\mu N/k$. Sólo es válida de $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$. En el tiempo $t = \pi/\omega_n, x = (2\mu N/k) - X_0$. En el segundo medio ciclo, el movimiento se invierte y debe usarse la Ec. 6.25b

$$A_2 = X_0 - \frac{3\mu N}{k} \quad \text{y} \quad B_2 = 0$$
$$x = \left(X_0 - \frac{3\mu N}{k}\right)\cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \qquad (6.26b)$$

Esta es una curva cosenoidal, desplazada en una cantidad $\mu N/k$ en la dirección negativa, y con una amplitud reducida de $X_0 - (3\mu N/k)$. Sólo es válida para $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$. En el tiempo $t = 2\pi/\omega_n$, $x = X_0 - (4\mu N/k)$. Para el tercer medio ciclo, $2\pi/\omega_n \leq t \leq 3\pi/\omega_n$, el movimiento se invierte otra vez y se puede usar nuevamente la Ec. 6.25a.

$$x = \left(X_0 - \frac{5\mu N}{k}\right)\cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad (6.26c)$$

En cada ciclo sucesivo, se reduce la amplitud en una cantidad igual a $4(\mu N/k)$. El movimiento se detiene al final del medio ciclo para el cual la amplitud es menor que $\mu N/k$. En este punto, la fuerza del resorte que restablece el equilibrio es menor que la fuerza de fricción, y el movimiento cesa, $kx < \mu N$. En la Fig. 6.10, esto ocurre al final del tercer ciclo. La posición de reposo está desplazada de la de equilibrio, y representa una deformación permanente en la cual se ha fijado la fuerza de fricción. Por lo general, una sacudida o golpeteo al sistema, moverá a éste lo suficiente para restablecer el equilibrio.

El decremento para la amortiguación constante no es logarítmico, sino lineal.

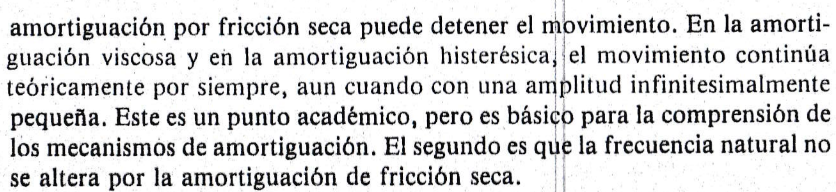
$$X_{n+1} = X_n - \frac{4\mu N}{k}$$

La curva desplazamiento-tiempo caerá dentro de la envolvente de un par de líneas rectas que se aproximan a la posición de equilibrio con una pendiente de $2(\mu N\omega_n/\pi k)$, como se muestra en la Fig. 6.10

Dos facetas interesantes de la amortiguación de Coulomb por fricción seca son significativas. La primera es la extensión. Toda la amortiguación tiene que deberse parcialmente a la amortiguación de Coulomb, ya que sólo la

**Fig. 6.10**





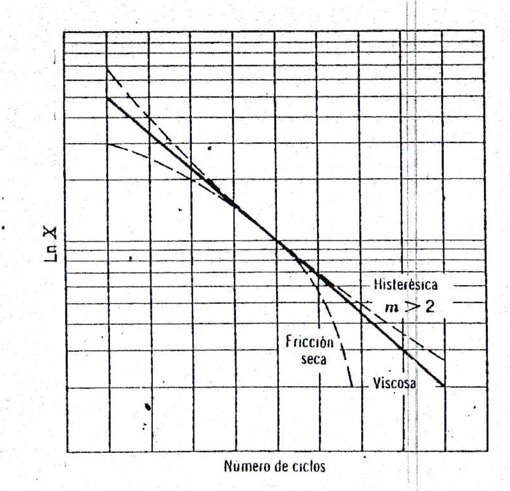
amortiguación por fricción seca puede detener el movimiento. En la amortiguación viscosa y en la amortiguación histerésica, el movimiento continúa teóricamente por siempre, aun cuando con una amplitud infinitesimalmente pequeña. Este es un punto académico, pero es básico para la comprensión de los mecanismos de amortiguación. El segundo es que la frecuencia natural no se altera por la amortiguación de fricción seca.



## 6.9 EPILOGO SOBRE VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA

Es raro que ocurra una forma de amortiguación con exclusión de otra. Con mayor frecuencia, ocurren en forma conjunta todas las tres clases de amortiguación, y quizá además con varias otras formas de amortiguación no men-

**Fig. 6.11**





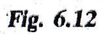
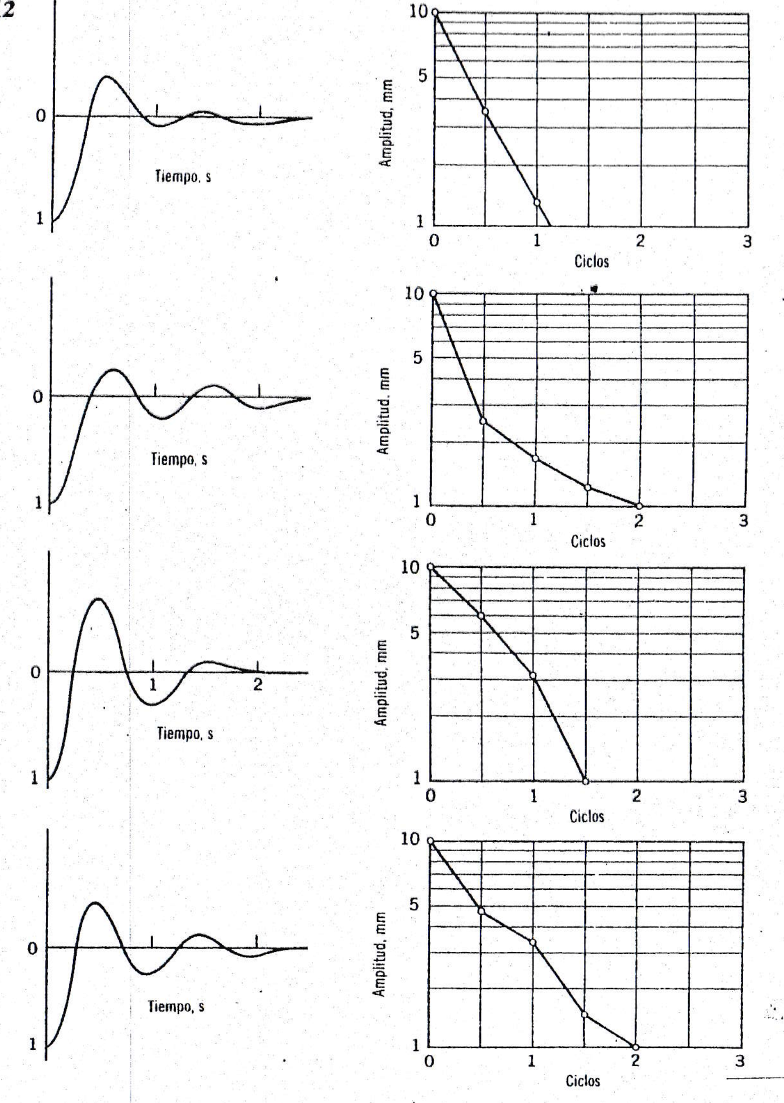



**Fig. 6.12**




cionadas hasta ahora. Para comprender un problema particular, si la amplitud es grande, la amortiguación se puede considerar como histerésica y si la amplitud es pequeña, como viscosa. Una indicación conveniente de la clase de amortiguación presente, es la graficación semilogarítmica del logaritmo del desplazamiento máximo versus el número de ciclos de vibración libre, tal como la de la Fig. 6.11. Si la amortiguación es viscosa o histerésica, con la

energía disipada por ciclo siendo proporcional al cuadrado de la amplitud, la gráfica será lineal. La pendiente de la línea es el decremento logarítmico. Si se encuentra presente la amortiguación interna y la energía disipada por ciclo es proporcional a la amplitud elevada a una potencia mayor que 2, la gráfica será curva y cóncava hacia arriba. Esto será particularmente notable para amplitudes más altas. Si se encuentra presente la fricción seca, la gráfica será cóncava hacia abajo.

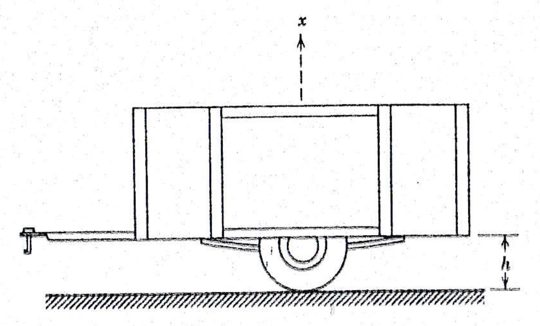
Con frecuencia son suficientes 1½ o 2 ciclos para indicar un cambio en amortiguación. Este es el caso de la Fig. 6.12. Aquí se muestran cuatro curvas de decremento, todas ellas tomadas de los registros reales de movimientos amortiguados de automóviles. Para obtenerlas, se montó una pluma de registro a uno de los parachoques, anterior o posterior, encontrándose el automóvil en reposo y se desplazó entonces el cuerpo del mismo. En el primer ejemplo, la amortiguación es viscosa, debido principalmente a un sistema de amortiguación en buen estado de funcionamiento. En el segundo, la acción del amortiguador es mala y la amortiguación se debe principalmente a la estructura o bastidor. En el tercer caso es aparente la fricción seca por partes estructurales que frotan entre sí. En el cuarto ejemplo, en el que los amortiguadores son inefectivos, teniendo el émbolo buzo un ajuste flojo, la amortiguación es diferente en cada dirección. Este ejemplo se incluye como curiosidad. La mayor parte de los amortiguadores limita el movimientos a dos o tres ciclos y este movimiento limitado es suficiente para proveer una buena indicación del comportamiento del sistema de resortes y amortiguadores.

Como última observación, aun para los sistemas de amortiguación de automóvil, la amortiguación es por lo general menor que medio crítica, $\zeta < 0.5$. Este hecho confirma una afirmación original: en los sistemas de ingeniería mecánica, la amortiguación es leve.

---

### *PROBLEMA EJEMPLO 6.24*

Un remolque está soportado sobre un eje único y un par de muelles. La fricción seca entre las hojas de los muelles reemplaza a un amortiguador hidráulico. Cuando el remolque se halla totalmente cargado y se le vacía

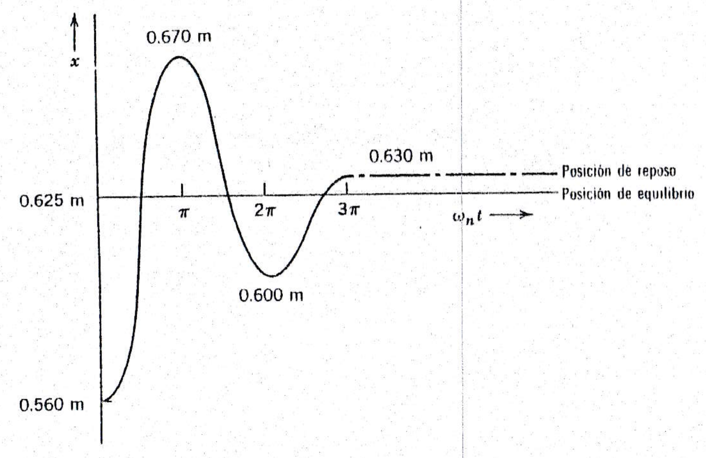





cuidadosamente, la altura del lecho del mismo es de 0.615 m a partir del nivel del piso. Cuando el remolque vacío se monta sobre gatos, de manera que se quita toda la carga de los muelles y el eje y se le hace descender cuidadosamente, la altura del lecho de éste es de 0.635 m. Calcúlese el número de ciclos de vibración libre amortiguada que experimentará el remolque si se le deprime 63.5 mm y se le libera desde el reposo. ¿Cuál será la posición de reposo del lecho del remolque?

65 mm

***Solución:***
La posición de equilibrio del remolque se encuentra en $h = 0.625$ m, en el punto intermedio a los dos extremos. En la posición más baja, la fricción




entre las hojas de los muelles evita que estos redispongan al remolque en el equilibrio, y lo mismo pasa para la posición más alta, pero las fuerzas de fricción se invierten

$$\frac{\mu N}{k} = 10 \text{ mm}$$

Para una oscilación amortiguada, con un desplazamiento inicial de 65 mm, se perderán durante cada ciclo $4(\mu N/k) = 40$ mm de amplitud. El remolque llegará al reposo después de 1½ ciclos, llegando el lecho a una altura de 0.630 m. En esta posición el desplazamiento a partir del equilibrio es de sólo 5 mm.

$$x = 5 \text{ mm} < \frac{\mu N}{k}$$

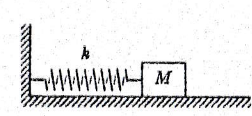
La fuerza de los muelles que restablece al remolque en la posición de equilibrio, no es suficiente para vencer la fuerza de fricción de Coulomb y el movimiento cesa. No es necesario decir que se puede alcanzar el equilibrio sacudiendo el remolque.

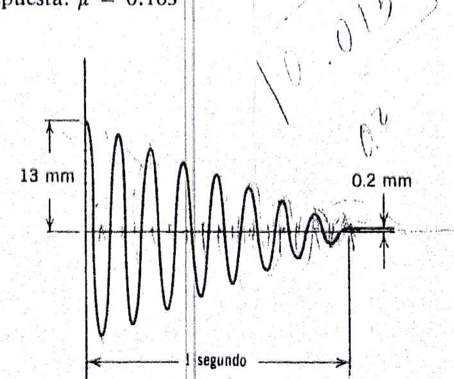
**PROBLEMA 6.25**
Determínese, para un sistema con frecuencia natural de 5 Hz, el coeficiente de amortiguación viscosa equivalente para la gaza de histéresis del Prob. 6.13

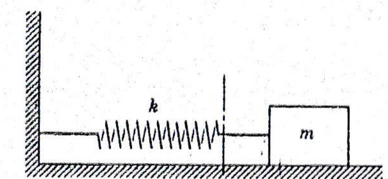
Respuesta: 1 567 N·s/m

**PROBLEMA 6.26**
Un resorte y una masa están restringidos a moverse horizontalmente sobre una superficie plana. Adelante se muestra un registro del movimiento. Determínese el coeficiente de fricción.

Respuesta: $\mu$ = 0.103



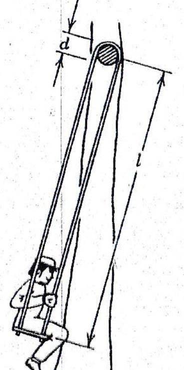

**PROBLEMA 6.27**
La masa de 15 kg del Prob. 6.26, recibe un desplazamiento inicial de 60 mm y se le libera. El módulo del resorte es de 1 800 N/m. Si se supone que el coeficiente de fricción seca cinético es constante, $\mu_k$ = 0.1, determínese la posición en la cual el bloque llega al reposo.

**PROBLEMA 6.28**
Al destaparse un reloj de bolsillo ordinario, se observa que la rueda de balance oscila a 5.2 Hz. Esta rueda consiste esencialmente de un anillo delgado de 12 mm de diámetro, montado en un eje que tiene un diámetro de 0.5 mm. El eje gira en cojinetes de pivotamiento de joya, cónicos. Se puede demostrar que el momento de fricción es, para los cojinetes de pivotamiento cónicos, $C \cdot \mu W d$, en donde $\mu$ es el coeficiente



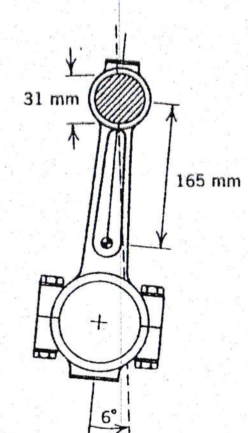
de fricción, $d$ es el diámetro del eje y $mg$ es el peso que soporta el eje. La constante $C$ vale 0.341 para cojinetes cónicos de pivotamiento de 90°. Cuando el reloj está desencordado por completo, si se desplaza la rueda de balance 90°, ésta oscilará 20 veces antes de detenerse. Calcúlese el coeficiente de fricción cinética seca, $\mu$.

Respuesta: $\mu$ = 0.144



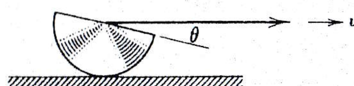

**PROBLEMA 6.29**
UN niño coloca un columpio en una rama de árbol. El coeficiente de fricción seca entre la cuerda y la rama es $\mu$. Determínese una expresión para la disminución del ángulo de oscilación en cada ciclo, causada por la fricción seca.

Respuesta: $\theta_\mu = \frac{2d}{l}\left(\frac{e^{\mu\pi}-1}{e^{\mu\pi}+1}\right)$




**PROBLEMA 6.30**
Una biela de 3.10 kg, se suspende en un cilindro que ajusta flojamente en el cojinete de pasador de articulación. La biela se desplaza un ángulo de 6° y se libera. El coeficiente de fricción entre el cojinete y el muñón es $\mu$ = 0.05. Determínese el número de ciclos hasta el cese del movimiento, y el ángulo de reposo.

Respuesta: 4½ ciclos; 0.00167 radián




**PROBLEMA 6.31**

Cuando se tira lateralmente del semicilindro sólido, con velocidad constante sobre la superficie plana horizontal, éste se inclinará con respecto a la horizontal en un ángulo $\theta_1$, cuyo ángulo es función del coeficiente cinético de fricción $\mu_k$. Descríbase el movimiento del semicilindro si éste parte del reposo y el coeficiente de fricción estático $\mu_s$ es mayor que $\mu_k$. Determínese la amplitud máxima de movimiento y la frecuencia natural.

Respuesta: $\theta_{\text{máx}} = \dfrac{3\pi}{4}(\mu_s - \mu_k)$; $\omega_n = \sqrt{\dfrac{8g}{3\pi r}}$

# SIETE

# VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

## 7.1 INTRODUCCION

En los sistemas reales, siempre se encuentra presente la amortiguación en cierto grado mensurable. Puede ser difícil pronosticar sus efectos, particularmente si el mecanismo de amortiguación es cualquier otro diferente del de la amortiguación viscosa simple, pero siempre se encuentra presente. Muchas veces se puede suponer para los propósitos de ingeniería, que la amortiguación es viscosa, y otras se puede ignorar por completo. Tan importante es saber cuándo se puede despreciar la amortiguación, como lo es saber qué clase de mecanismo de amortiguación es mejor suponer. Como ejemplo, existe poca diferencia entre las respuestas amortiguada y no amortiguada, de un sistema de grado único de libertad, si la frecuencia forzante es muchas veces mayor que la frecuencia natural. En este caso, la amortiguación se puede ignorar sin importar el mecanismo. Pero el efecto de la amortiguación en, o cerca de la resonancia, es cosa bastante diferente.

Por lo general, podemos catalogar la amortiguación de acuerdo con una o más de las tres formas ya estudiadas, viscosa, histerésica o de fricción seca. Cada una de éstas es simplemente un modelo de la amortiguación real presente y a frecuencias lejanas de la de resonancia, la diferencia es más o menos académica. En la resonancia, es pronunciada la diferencia entre las varias formas de amortiguación. Por ejemplo, el modelo para fricción seca no limita las amplitudes de resonancia, pero las amortiguaciones histerésica y viscosa sí lo hacen. La amortiguación viscosa afecta la frecuencia del máximo de resonancia, pero las amortiguaciones histerésica y de fricción seca no lo hacen.

## 7.2 VIBRACION ARMONICA FORZADA AMORTIGUADA $F(t) = F_1$ sen $\omega t$

La Fig. 7.1 muestra el sistema simple resorte-masa del Cap. 4, sometido a una función forzante armónica $F_1$ sen $\omega t$, y con un amortiguador viscoso añadido. Como hemos aprendido, el mecanismo de amortiguación viscosa provee una fuerza de amortiguación que es proporcional a la velocidad de la masa. A partir del diagrama de cuerpo libre, la ecuación de movimiento es

$$-kx - c\dot{x} + F_1 \operatorname{sen}\omega t = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_1 \operatorname{sen}\omega t \qquad (7.1)$$

Esta es, otra vez, una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Constituye una forma particular de la Ec. 6.2, y la integral debe contener tanto la integral general, que es la Ec. 6.4 como una integral particular, que será función de la ecuación de movimiento cuando la fuerza aplicada sea $F_1$ sen $\omega t$. La solución es

$$x = e^{-(c/2m)t}[A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen}\omega_d t] + C \cos \omega t + D \operatorname{sen}\omega t \qquad (7.2)$$

El primer término es el término homogéneo y es una transitoria que se amortigua con el tiempo. Los términos segundo y tercero son los términos particulares y representan la vibración de estado-estable que se encuentra presente en tanto se halla activa la función forzante. En el Cap. 4, omitimos el término que implicaba la vibración forzada amortiguada, sin explicar por qué era esto permisible, al considerar el estado estable. Ahora podemos ver que ésta se puede despreciar si $ct/2m > 5$.

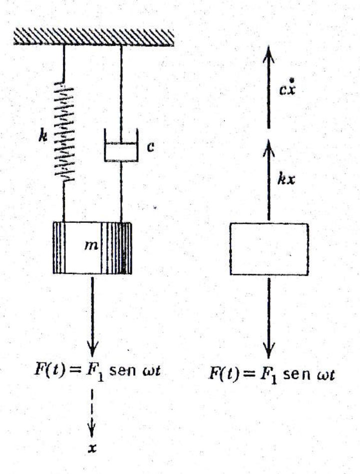



**Fig. 7.1**



Sustituyendo la solución de estado estable en la ecuación de movimiento, tenemos

$$\left[-C\omega^2 + D\frac{c\omega}{m} + \frac{k}{m}C\right]\cos \omega t$$
$$+\left[-D\omega^2 - C\frac{c\omega}{m} + \frac{k}{m}D\right]\sin \omega t = \frac{F_1}{m}\sin \omega t \qquad (7.3)$$

Esta ecuación establece vectorialmente, en forma simple, que para cualquier armónica dada, la amplitud de la componente coseno vale cero, y la amplitud de la componente seno es $F_1/m$ en todo momento. Estas afirmaciones se pueden expresar en dos ecuaciones simultáneas que podemos resolver para las magnitudes de $C$ y $D$. Si se hubiera seleccionado la función coseno en lugar de la función seno para la excitación, se habrían invertido las ecuaciones. En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (\omega_n^2 - \omega^2) & +\dfrac{c\omega}{m} \\ -\dfrac{c\omega}{m} & (\omega_n^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F_1}{m} \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

Los valores de $C$ y $D$ son

$$C = -\frac{F_1 c\omega}{m^2\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2\right]}$$
$$D = \frac{F_1(\omega_n^2 - \omega^2)}{m\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2\right]} \qquad (7.5)$$

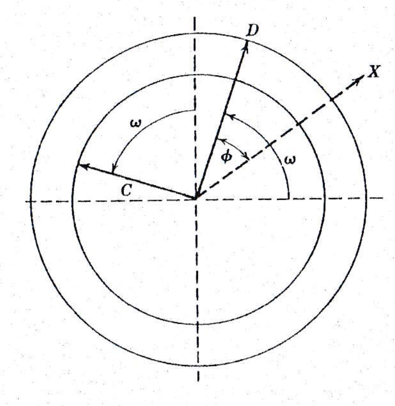
El valor negativo de la constante $C$, indica simplemente que la componente coseno de la amplitud forzada debe estar retrasada con respecto a la componente seno en lugar de adelantársele. Esto se puede demostrar en un diagrama vectorial, Fig. 7.2. Componiendo los vectores $C$ y $D$ en el vector único $X$, a un ángulo de fase con $D$, la Ec. 7.2 se vuelve

$$x = e^{-(c/2m)t}[A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen}\omega_d t] + X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \qquad (7.6)$$

La magnitud de $X$ es

$$X = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{F_1}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{c\omega}{m}\right)^2}}$$
$$= \frac{F_1}{k\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (7.7)$$

Fig. 7.2




Recordando que $X/(F_1/k)$ es la *relación de amplitud,* en la Fig. 7.3 se muestra la respuesta de un sistema de grado único de libertad viscosamente amortiguado, excitado por la fuerza armónica $F_1$ sen $\omega t$

$$\frac{X}{F_1/k}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{7.8}$$

Son inmediatamente evidentes dos características de la respuesta. Una es que la amortiguación disminuye la relación de amplitud para todas las frecuencias, algo en proporción a la cantidad de amortiguación presente. La reducción de la relación de amplitud en la presencia de amortiguación, es más notable en, o cerca de, la resonancia. La segunda observación es que, con la amortiguación, la máxima relación de amplitud ocurre a una frecuencia más baja que la frecuencia de resonancia, $\omega_n = \omega_n$. Podría esperarse que la relación de amplitudes máxima ocurriera en la resonancia con la frecuencia natural amortiguada, $\omega_d$, pero esto no sucede. La relación máxima de amplitud ocurre cuando

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{7.9}$$

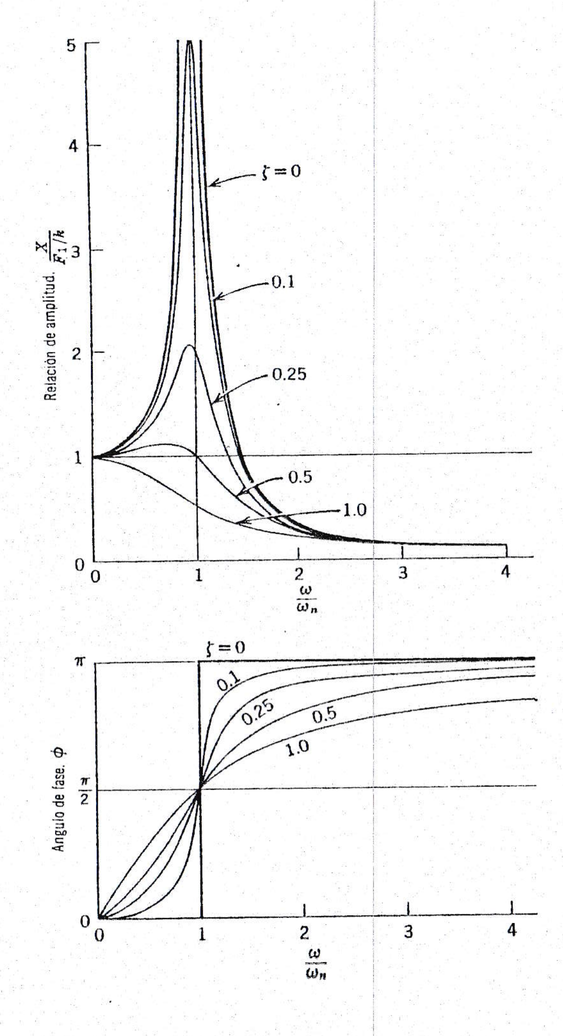
la que es más baja que la frecuencia natural, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ en una pequeña cantidad.

Esto puede parecer trivial, pero en las pruebas de resonancia, ciertas veces es conveniente obtener una medida de la amortiguación determinando la amplitud de la vibración en la resonancia. Inversamente, si se conoce la cantidad de amortiguación, es fácil hacer un cálculo de la amplitud de la vibración en la resonancia. En $\omega = \omega_n$,

$$\left[\frac{X}{F_1/k}\right]_{\omega=\omega_n}=\frac{1}{2\zeta}=Q \tag{7.10}$$



Fig. 7.3




Esta es una de las más importantes relaciones físicas en las pruebas de vibración. Si se fuera a usar la *amplitud máxima* de vibración, en lugar de la amplitud en la resonancia, se introduciría un pequeño error ya que éstas no son las mismas, pero el error sería despreciable para amortiguación leve. Este es otro de los puntos académicos asociados con la amortiguación viscosa.

El valor de la relación de amplitud en la resonancia, se denomina también $Q$, tomando prestado un término de los circuitos de ingeniería eléctrica, lo que nos permite usar un gran número para designar la amortiguación.

El ángulo $\phi$ de fase, en el cual la respuesta $X$ se defasa atrasándose con res-

pecto a la función forzante, se define como

$$\tan\phi = \frac{-C}{D} = \frac{c\omega}{m(\omega_n^2-\omega^2)} = \frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{7.11}$$

Este es muy pequeño para valores pequeños de $\omega/\omega_n$. Para valores muy grandes de $\omega/\omega_n$, el ángulo de fase se aproxima a 180°, asimétricamente. Lo anterior significa que la amplitud de vibración se encuentra en fase con la fuerza armónica de excitación para $\omega/\omega_n \ll 1$, y fuera de fase para $\omega/\omega_n \gg 1$. En la resonancia, el ángulo de fase es de 90° para todos los valores de amortiguación viscosa. Abajo de la resonancia, el ángulo de fase aumenta al aumentar la amortiguación. Arriba de la resonancia, el ángulo de fase disminuye al aumentar la amortiguación. La Fig. 7.3 muestra también la variación de ángulo de fase con la frecuencia y la amortiguación.

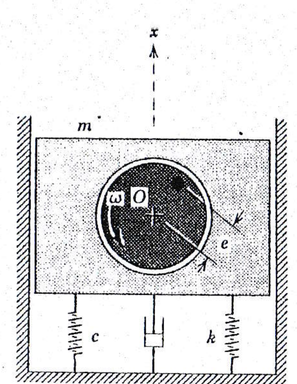
## 7.3 VIBRACION FORZADA AMORTIGUADA CAUSADA POR FUERZAS ROTATORIAS NO EQUILIBRADAS $F(t) = m_0\omega^2 e$ sen $\omega t$

En la Fig. 7.4, se ha reemplazado la fuerza $F_1$ por $m_0\omega^2 e$, la magnitud del vector fuerza causado por la masa no equilibrada $m_0$ que gira alrededor del eje geométrico 0. La masa total es $m$, que contiene al rotor excéntrico, y está restringida a moverse tan sólo en la dirección vertical. Se ignora el movimiento lateral.

Reemplazando $F_1$ por $m_0\omega^2 e$, en la Ec. 7.7,

$$X = \frac{m_0\omega^2 e}{k\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Fig. 7.4



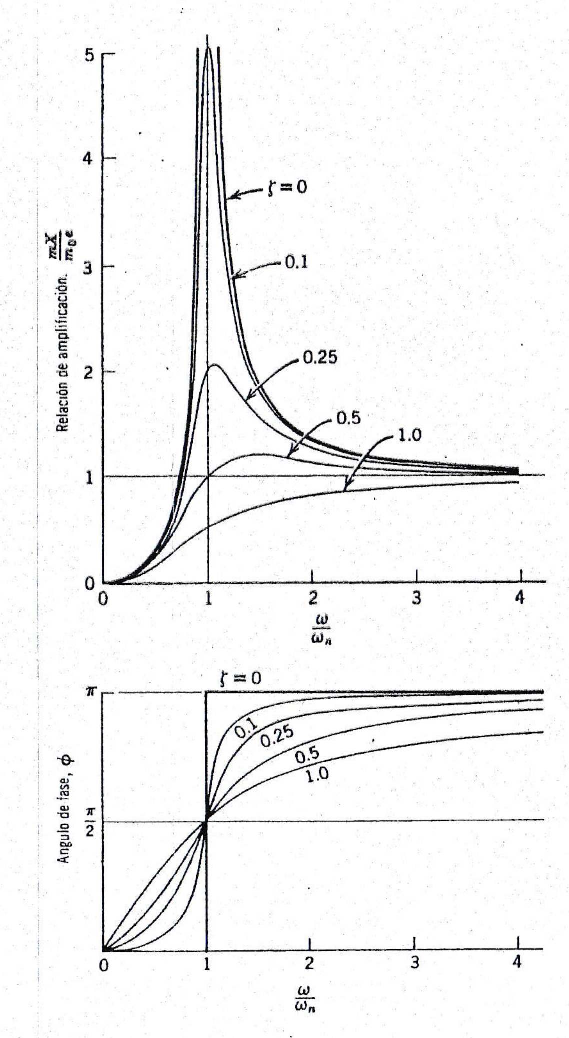



Ya que $\omega_n^2 = k/m$

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{7.12}$$

Esta es la *relación de amplificación* para la vibración forzada amortiguada. La Fig. 7.5 es la graficación no dimensional de $mX/m_0e$ como función de la relación de frecuencia $\omega/\omega_n$. Esta se parece mucho a la relación de amplitud

Fig. 7.5



excepto que pasa a través del origen y a frecuencias muy altas, $\omega/\omega_n \gg 1$, la amplitud $X \to m_0e/m$. El ángulo de fase $\phi$ es idéntico al ángulo de fase para una fuerza armónica $F(t) = F_1$ sen $\omega t$.

## 7.4 FUERZAS TRANSMITIDAS Y AISLAMIENTO DE VIBRACION

Consideremos otra vez las fuerzas transmitidas a la base o cimentación de un sistema elástico e incluyamos el efecto de la amortiguación. Haciendo referencia a la Fig. 7.6, la masa $m$ se encuentra sometida a la fuerza armónica $F_1$ sen $\omega t$. El movimiento resultante en la dirección-$x$, será también armónico simple. La fuerza del resorte y la fuerza de amortiguación, son respectivamente,

$$kx = kX \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

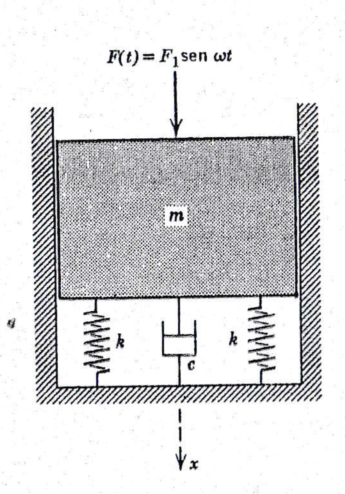
$$c\dot{x} = cX\omega \cos(\omega t - \phi)$$

Estos son vectores ortogonales, y su suma representa la magnitud de la fuerza transmitida total

$$|F_{TR}| = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

Esto incluirá tanto la fuerza transmitida a través del amortiguador, como la fuerza transmitida a través del resorte.

**Fig. 7.6**






Se ha definido la relación de transmisión como la fracción de la máxima fuerza impuesta, que se transmite a través de la cimentación.

$$TR = \frac{X}{F_1}\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

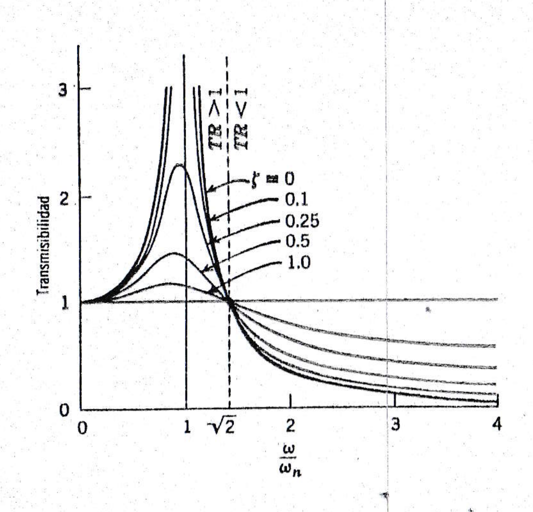
Sustituyendo para $X$, de la Ec. 7.8,

$$TR = \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{7.13}$$

En la Fig. 7.7 se presenta una gráfica de la relación de transmisión para varios valores de amortiguación.

Si comparamos este resultado con la Ec. 5.7, es muy obvio que las fuerzas transmitidas no pueden llegar a ser infinitas en la resonancia, a menos que no exista amortiguación. Existiendo amortiguación, el denominador nunca será cero. Un examen cuidadoso de la Fig. 7.7 muestra también varios otros aspectos interesantes. Aunque la amortiguación disminuye la amplitud de movimiento para todas las frecuencias, sólo disminuye las fuerzas máximas transmitidas si $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$. Arriba de este valor, el aumento de amortiguación hace disminuir las fuerzas transmitidas. Si la frecuencia forzante varía, la selección de soportes elásticos para minimizar la transmisión de fuerza, debe ser un compromiso. Estos deben ser lo suficientemente amortiguantes para limitar la amplitud y las fuerzas transmitidas al pasar por la resonancia y no lo bastante para aumentar seriamente la fuerza transmitida durante los picos de operación. Por fortuna el hule natural es un material muy satisfactorio y

**Fig. 7.7**



con frecuencia se le usa para el aislamiento de vibración. Para máquinas muy delicadas, que requieren un aislamiento extremo, sólo los resortes arrollados pueden proporcionar las grandes deformaciones estáticas necesarias para las frecuencias naturales muy bajas.

## 7.5 INSTRUMENTOS SISMICOS

La medición de la vibración en todos sus aspectos, amplitud, velocidad, aceleración y esfuerzo, sólo para mencionar varias de las cantidades más buscadas, constituye un campo por sí misma. Los instrumentos usados para la medición y registro de vibraciones, han sido altamente desarrollados y son intrincados y costosos. No obstante, en el núcleo de esta clase de instrumentos, se encuentra por lo general una forma de instrumento sísmico. En su forma más simple, un instrumento sísmico está formado por una masa sísmica elásticamente soportada, montada en un marco, de modo que el movimiento relativo entre la masa y el bastidor, puede ser indicado o registrado. Este movimiento relativo constituye una medida directa de la vibración. La Fig. 7.8 es un esquema de un dispositivo medidor de vibración sísmica.

La masa está tanto suspendida elásticamente del marco de soporte, como viscosamente amortiguada. Supongamos que el bastidor se mueve con un movimiento correspondiente al desplazamiento

$$u = b \operatorname{sen} \omega t$$

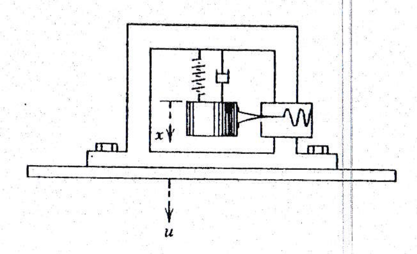
En este caso estamos utilizando la fundamental, pero podríamos igualmente bien haber seleccionado una armónica de orden $n$, $u = b \operatorname{sen} n\omega t$.

Si llamamos $x$ al desplazamiento de la masa sísmica, la ecuación de movimiento es

$$-k(x-u)-c(\dot{x}-\dot{u}) = m\ddot{x} \tag{7.14}$$

Debemos ser cuidadosos y notar que la fuerza del resorte es proporcional al desplazamiento relativo entre la masa sísmica y el marco, y que la fuerza sísmica es proporcional a la velocidad relativa. El movimiento absoluto de la masa sísmica, $x$, es de interés secundario, ya que lo que se desea medir es el movimiento relativo que medirá el instrumento y éste es el movimiento $u$ del marco. Disponiendo la ecuación de movimiento en términos del desplazamiento y sus derivadas después de primero definir el desplazamiento relativo como la diferencia entre $x$ y $u$

**Fig. 7.8**






$$z = x - u$$

La ecuación de movimiento llega a ser

$$m(\ddot{z}+\ddot{u}) + c\dot{z} + kz = 0$$
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mb\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{7.15}$$

Esta ecuación es esencialmente la misma que la 7.1, habiéndose reemplazado la fuerza $F_1$ sen $\omega t$ por $mb\omega^2$ sen $\omega t$. En el estado estable, el movimiento relativo seguiría el movimiento del marco, de acuerdo con la relación,

$$z = Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{7.16}$$

en la que $z/b$ se determina por la fracción,

$$\frac{Z}{b} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{7.17}$$

y el ángulo de fase es el mismo que en la Ec. 7.11.

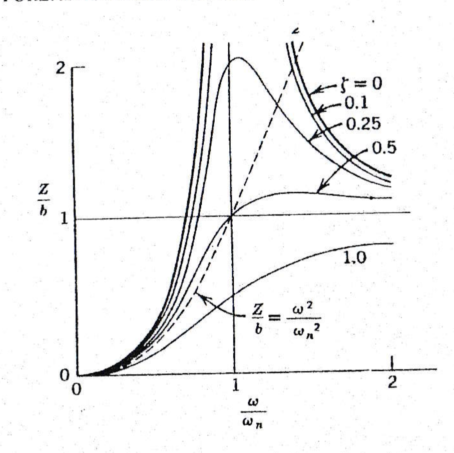
Si deseamos medir o indicar la amplitud, la frecuencia natural del instrumento sísmico debe ser varias veces menor que la armónica más baja del movimiento que se va a medir. Esto significa que la relación $\omega/\omega_n$ es grande, y el movimiento relativo entre la masa y el marco se aproxima al movimiento absoluto del marco. Existe una diferencia de lectura, que se aproxima a 180°, pero esto no afecta la magnitud de la lectura, que por lo general, es lo que importa. Esencialmente, la masa sísmica no responde al movimiento forzado y permanece sin movimiento, en el espacio. Podemos usar la masa sísmica como referencia para medir el movimiento. La amortiguación tiene poco efecto sobre la amplitud relativa de movimiento y en general, los instrumentos sísmicos de medición de amplitud no están amortiguados.

Si deseamos medir o indicar la aceleración, la respuesta del instrumento debe hacer juego con la aceleración. La aceleración $\ddot{u} = -b\omega^2$ sen $\omega t$. El movimiento relativo es una indicación de la aceleración, si $\omega/\omega_n \ll 1$. Redisponiendo las Ecs. 7.16 y 7.17,

$$z = \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\right] b\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{7.18}$$

Para $\omega/\omega_n \ll 1$, todo el corchete vale aproximadamente la unidad, y $\omega_n^2$ es una constante del sistema. En la Fig. 7.9, $b(\omega^2/\omega_n^2)$ es una parábola. Se puede ver

**Fig. 7.9**




que la respuesta del instrumento sísmico se ajusta muy bien a esta parábola para $\omega/\omega_n \leq 0.5$.

En el caso de un acelerómetro, la frecuencia natural debe ser más alta que la armónica más alta del movimiento que se va a medir. Este es un problema considerable, ya que la mayor parte del movimiento que se mide experimen- considerable, ya que la mayor parte del movimiento que se mide experimen- talmente no es senoidal, y contiene armónicas más altas. Si se añade la amor- tiguación, $0.5<\zeta<0.7$, se puede extender la gama de acelerómetro hasta $\omega/\omega_n \leq 0.75$, dependiendo del error aceptable. Los acelerómetro sísmicos con una gama de frecuencia de hasta 5 000 cps, pueden obtenerse en el comercio.

---

### *PROBLEMA EJEMPLO 7.1*

Un equipo pequeño de compresora para pintura, operada por motor, tiene una masa de 27 kg y hace que cada uno de los cuatros aisladores de hule sobre el cual está montado, se deforme 5 mm. El motor gira a una velocidad constante de 1 750 rpm. La carrera del émbolo del compresor es de 50 mm. El émbolo y las partes reciprocantes tienen una masa de 5 kg, y para los propósitos de este problema, se puede suponer que el movimiento reciprocante del émbolo es armónico simple. Determínese la amplitud del movimiento vertical a la velocidad de operación. Supóngase que el factor de amortiguación para el hule es $\zeta = 0.2$.

***Solución:***

Este caso constituye una clara implicación de la Ec. 7.12, que establece que la relación de amplificación es

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



En este caso, la fuerza armónica varía a una frecuencia de 1 750 rpm, o

$$\omega = \frac{2\pi}{60}(1750) = 183\ \text{s}^{-1}$$

La frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9.806}{0.005}} = 44.3\ \text{s}^{-1}$$

y la relación de frecuencia

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{183}{44.3} = 4.14$$

Para un factor adimensional de amortiguación $\zeta = 0.2$,

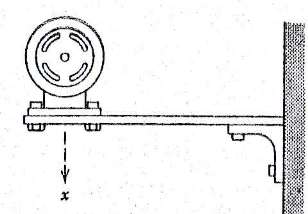
$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{(4.14)^2}{\sqrt{(1-(4.14)^2)^2+(2(0.2)(4.14))^2}}$$

$$= \frac{17.12}{\sqrt{(-16.12)^2+(1.655)^2}} = 1.056$$

El émbolo y las partes reciprocantes tienen una masa de 0.5 kg. La masa total del compresor y del motor es de 27 kg. La excentricidad es de 25 mm, la mitad de la carrera. Esto significa que

$$X = \frac{0.5}{27}(25)(1.06) = 0.49\ \text{mm}$$

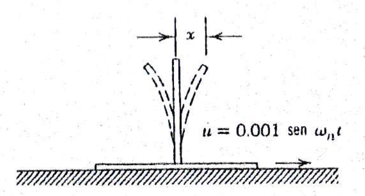
---




**PROBLEMA 7.2**

Un motor eléctrico tiene una masa de 25 kg y está montado en una viga en voladizo desde una pared vertical. Si se desplaza al motor 16 mm, se puede observar que la vibración del mismo y de la viga, se amortigua a menos de 1 mm en cuatro ciclos. Calcúlese el valor del parámetro adimensional $mX/m_0e$ para la vibración forzada resonante, si la armadura estuviera desequilibrada.

Respuesta: 4.53




**PROBLEMA 7.3**

Se observa que la vibración libre de una viga en voladizo disminuye desde una amplitud de 20 mm, hasta la mitad de ese valor, en 10 ciclos. Calcúlese la amplitud máxima de vibración en la resonancia que se esperará si se somete la base a una vibración armónica de 1 mm de amplitud.

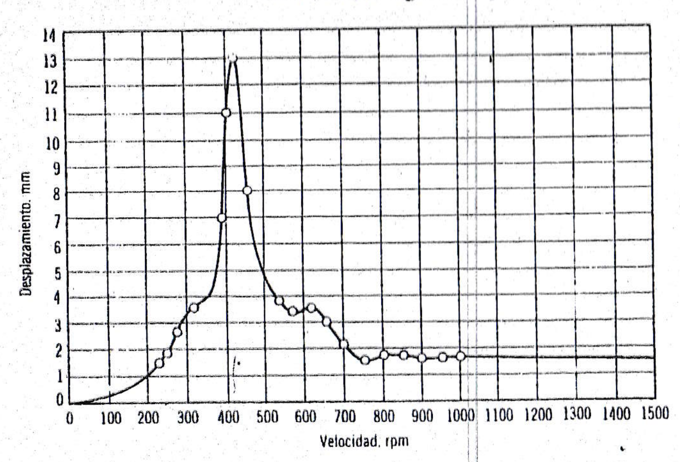
Respuesta: 46 mm

**PROBLEMA 7.4**

Una máquina tiene una frecuencia resonante a 400 rpm cuando se soporta sobre 4 resortes de acero para los cuales puede despreciarse $\zeta$. A 1 200 rpm, la amplitud de movimiento no amortiguado, es de 0.5 mm. ¿Cuál sería la amplitud si los resortes de acero se reemplazaran por cuatro aisladores de hule en los que $\zeta = 0.25$? La frecuencia resonante permanece sin cambio.

**PROBLEMA 7.5**

La gráfica que sigue muestra el desplazamiento vertical real de una criba para pulpa de papel montada sobre aisladores de hule, cuando se hace variar la velocidad desde cero hasta 1 500 rpm. Calcúlese la relación de amortiguación $\zeta$ del sistema.

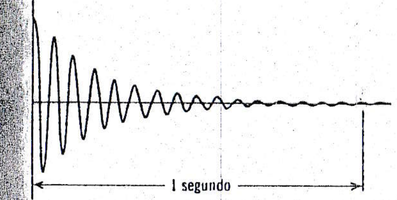



**PROBLEMA 7.6**

Cuando se desplaza el motor eléctrico del Prob. 7.2, el movimiento se amortigua de modo que la relación de amplitudes sucesivas de vibración libre es 2:1. ¿Cuál es la relación de transmisión para $\omega/\omega_n = 5$?

Respuesta: R.T. = 0.062






**PROBLEMA 7.7**

Se muestra la disminución de vibración libre pa una estructura compleja que soporta y aloja un tor de chorro. Calcúlense:

(a) La relación de amplificación de vibración, $mX/m_0e$, es la resonancia.

(b) La relación de amplificación a la velocidac operación de 2 200 rpm.

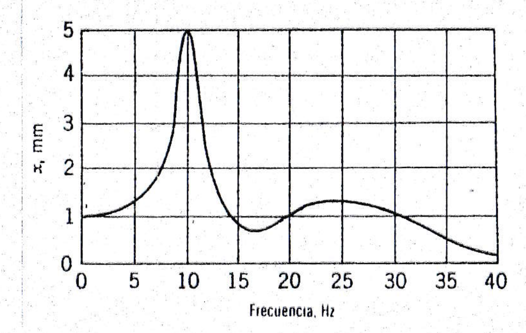
**PROBLEMA 7.8**

Un motor eléctrico opera equipo mecánico a vel dad de 1 750 rpm. El sistema se halla soport sobre cojines de hule que sufren una deformación estática de 5 mm. Determínese la relación de transm sión de fuerza hacia la cimentación, si la amo guación en los cojines de hule es de $\zeta = 0.25$.

Respuesta: 0.1414

**PROBLEMA 7.9**

Adelante se muestra la respuesta modal de un bastidor espacial cuando se le excita por un desplazami to armónico de magnitud constante. Calcúlese amortiguación del sistema.




**PROBLEMA 7.10**

En una prueba de resonancia, bajo excitación armónica, se notó que la amplitud de movimiento en la resonancia era exactamente el doble de la amplitu una frecuencia de excitación 20% mayor que la de sonancia. Determínese el factor de amortiguación $\zeta$ del sistema.

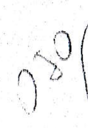
Respuesta: $\zeta = 0.138$

**PROBLEMA 7.11**

Demuéstrese que para pequeñas cantidades de amortiguación, la relación de amortiguación $\zeta$ se puede aproximar a partir de la curva de respuesta como

$$\zeta = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

siendo $f_2$ y $f_1$ las frecuencias a ambos lados de la resonancia en las que la amplitud vale 0.707 del valor máximo.



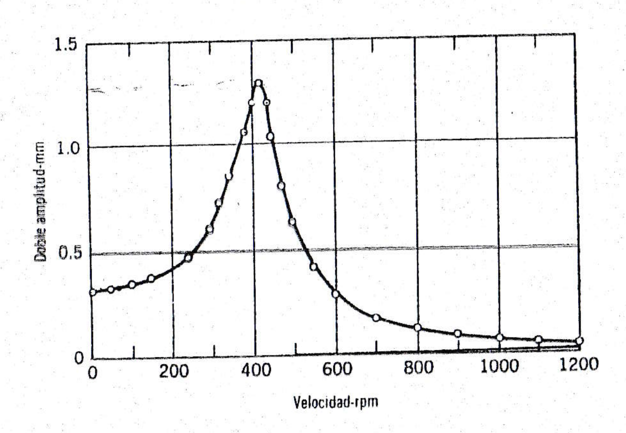
**PROBLEMA 7.12**

Un dispositivo electromecánico está montado sobre un juego de aisladores de hule. El sistema exhibe un pico de amplitud de resonancia de 5:1 a una frecuencia de 500 cpm. ¿Arriba de qué frecuencia se reducirá la transmisión de fuerza a la mitad?

Respuesta: 879 cpm

**PROBLEMA 7.13**

La curva de resonancia mostrada, representa el movimiento vertical real del piso de una fábrica, medido cerca de una punzonadora. Calcúlese la velocidad de resonancia y la relación de amortiguación $\zeta$. ¿Cuál es la relación de transmisión a 1 800 rpm?




**PROBLEMA 7.14**

Demuéstrese que el máximo de una curva de resonancia viscosamente amortiguada, ocurre a $\omega = (\sqrt{1-2\zeta^2})\,\omega_n$.



**PROBLEMA 7.15**

Si se usa un vibrómetro para determinar las amplitudes de vibración a frecuencias mucho más altas que su frecuencia natural, ¿cuál será la relación $\zeta$ óptima de amortiguación del sistema para la mayor precisión?

Respuesta: $\zeta = 0.707$

**PROBLEMA 7.16**

Un motor eléctrico que se usa como impulsor mecánico, está montado en el centro de una mesa de bastidor ligero. El peso del motor sumado a la masa efectiva de la mesa es de 40 kg. La armadura y las partes rotativas tienen una masa de 10 kg y una excentricidad de 15 mm. Se observa que la mesa se deforma 3 mm cuando se monta el motor. En la vibración libre, el desplazamiento de 32 mm se amortigua hasta 1 mm en un segundo. La velocidad de operación del motor es de 875 rpm. Calcúlese la amplitud de movimiento, si se supone que la amortiguación es viscosa.

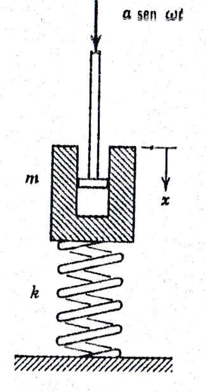
Respuesta: 0.10 mm

**PROBLEMA 7.17**

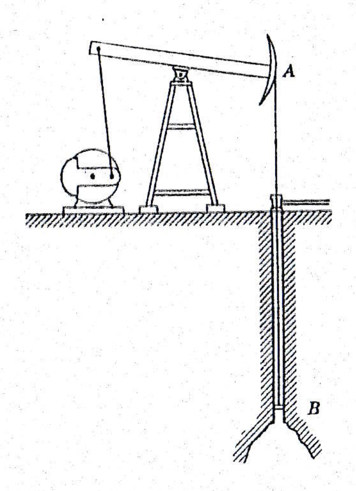
Un vibrómetro tiene una frecuencia natural de 5 Hz y está construido con un factor de amortiguación de $\zeta = 0.6$. Determínese la frecuencia más baja para la cual se puede medir la vibración con una precisión de $\pm 2\%$.

**PROBLEMA 7.18**

Un émbolo desliza con fricción viscosa dentro de un cilindro barrenado en una masa $m$. El émbolo tiene un movimiento senoidal de $b$ sen $\omega t$. Determínese la ecuación de movimiento de la masa $m$. Determínese una expresión para $x$ como función de $\omega t$.




Respuesta: $$x = \frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \times b\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$




**PROBLEMA 7.19**

Un sistema de bombeo para pozo petrólero consiste de una viga oscilante impulsada por motor y barras de succión sujetas a una bomba de elevación mecánica. El diámetro del cilindro de la bomba es de 51 mm. Las barras de acero para la succión son de 19 mm de diámetro y 1 905 m de longitud. La masa total de las barras de succión sumergidas en la columna de petróleo, es de 3 675 kg. La columna de petróleo que se levanta en cada carrera de la bomba es de 3 175 kg. La velocidad del motor de la bomba es de 18 rpm. Supóngase que la relación de amortiguación $\zeta$ es de 0.5. Si la carrera de las barras de succión de la viga oscilante es de 1.25 m, ¿cuál es la carrera del émbolo? Determínese la producción del pozo en barriles por día.

Respuesta: 410 bbls/día

## 7.6 VIBRACION ARMONICA FORZADA CON AMORTIGUACION HISTERESICA

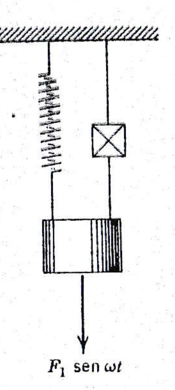
En el sistema de la Fig. 7.10, se ha reemplazado el amortiguador viscoso por un amortiguador histerésico. La ecuación de movimiento se vuelve

$$-kx - \frac{h}{\omega}\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + kx = F(t) \tag{7.19}$$

En este caso, la fuerza de amortiguación no es función simplemente de la velocidad. Es también función de la frecuencia forzante $\omega$. Esto hace que la ecuación de movimiento sea no lineal, a menos que $\omega = \omega_n$.

**Fig. 7.10**






La solución matemática para el movimiento con amortiguación histerésica es bastante compleja. Podemos simplificar nuestro trabajo considerando sólo la respuesta de estado-estable a una función forzante senoidal $F(t) = F_1$ sen $\omega t$, o $F(t) = F_1 e^{i\omega t}$ y el movimiento será armónico,

$$x = X \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

donde

$$X = \frac{F_1}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} \tag{7.20}$$

dividiendo entre $\omega_n^2$, la relación de amplitud es

$$\frac{X}{F_1/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}} \tag{7.21}$$

y el ángulo de fase,

$$\tan\phi = \frac{h}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{h}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{7.22}$$

En la Fig. 7.11 se muestra la respuesta de estado estable de un sistema de grado único de libertad con amortiguación histerésica. Comparando la Fig. 7.11 con la Fig. 7.3 de amortiguación viscosa, son aparentes las diferencias. Una es que la relación máxima de amplitud para la amortiguación histerésica ocurre en la frecuencia resonante, $\omega = \omega_n$ y no a una frecuencia abajo de la de resonancia. La segunda es que el ángulo de fase tiene una intersección al origen de $\phi = \tan^{-1}(h/k)$ a frecuencia forzante cero. El movimiento con amortiguación histerésica nunca puede estar en fase con la frecuencia forzante, a menos que supongamos el caso trivial en el que tanto la amortiguación como la frecuencia forzante valen cero. Hemos aprendido que el factor $h/k$ es una medida de la amortiguación histerésica y esto aparece otra vez aquí. Nótese que éste toma el lugar del parámetro adimensional $2\zeta(\omega/\omega_n)$.

Para el resorte y un amortiguador histerésico, la respectiva fuerza de resorte, y las fuerzas de amortiguación transmitidas a la base o cimentación, son

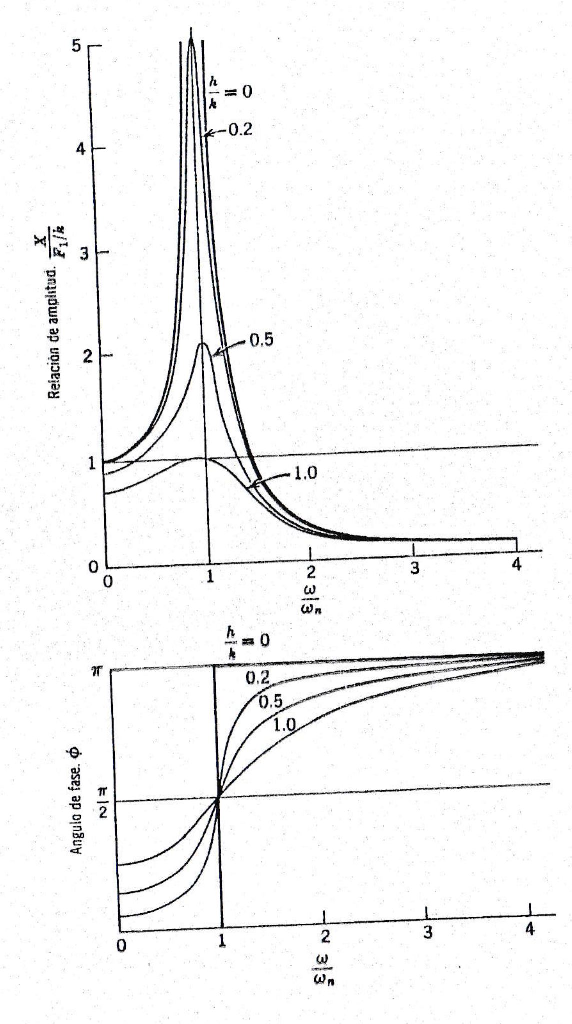
$$kx = kX \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\frac{h}{\omega}\dot{x} = hX\cos(\omega t - \phi)$$

Estos son también vectores ortogonales y la magnitud de la fuerza total transmitida es

$$|F_{T.R.}| = X\sqrt{k^2 + h^2}$$

**Fig. 7.11**

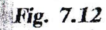


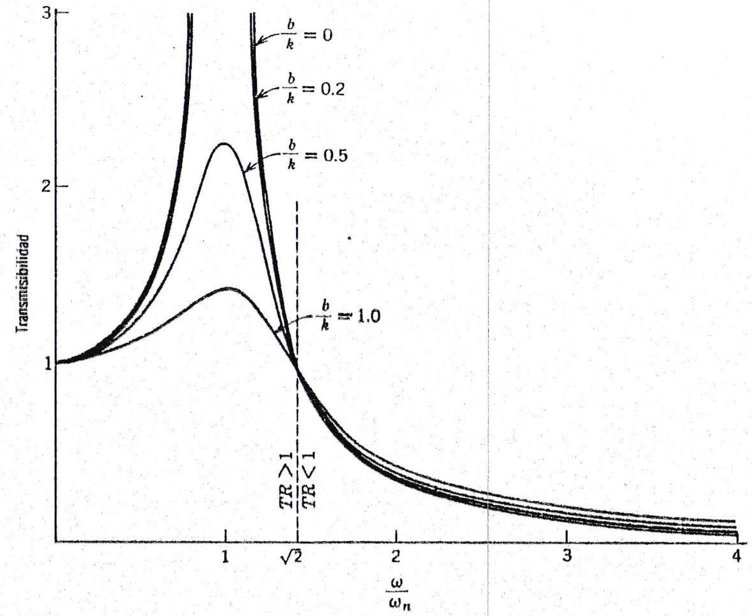

La relación de transmisión será

$$\text{T.R.} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{h}{k}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{h}{k}\right)^2}} \tag{7.23}$$

En la Fig. 7.12 se grafica la relación de transmisión para amortiguación histerésica. Nótese que la transmisión máxima de fuerza ocurre en la resonancia para la amortiguación histerésica, pero no ocurre lo mismo para la amortiguación viscosa. La transmisibilidad es exactamente la misma, tanto para la amortiguación viscosa como para la histerésica en $\omega = \omega_n$ y en $\omega = 2\omega_n$. Abajo de $\omega = \omega_n$, y arriba de $\omega = 2\omega_n$, la amortiguación viscosa provee mayor transmisión de fuerza. Entre $\omega = \omega_n$ y $\omega = 2\omega_n$, la amortiguación histerésica proporciona mayor transmisión de fuerza.




**Fig. 7.12**




Estas diferencias entre la vibración forzada con amortiguación por histéresis y la vibración forzada con amortiguación viscosa, no son significantes, pero constituyen la fuente de cierta dificultad en la reconciliación de información física. En la mayor parte de las vibraciones amortiguadas, la amortiguación no es viscosa, y el suponer que sí lo es, sin conocer las características reales, es una suposición que conduce a cierto error. Sin embargo, por lo general, es una suposición conservativa.

## 7.7 VIBRACION ARMONICA FORZADA CON AMORTIGUACION POR FRICCION EN SECO

Si se encuentra presente la fricción en seco, es muy difícil pronosticar la respuesta de un sistema de grado único de libertad sometido a una función forzante armónica. Tampoco es lineal la ecuación de movimiento.

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{7.24}$$

El signo de la fuerza de fricción cambia con la dirección de movimiento. Se conoce una solución exacta debida al trabajo precursor de J. P. Den Hartog, pero ésta sólo sirve para cuando la fuerza de amortiguación es lo bastante pequeña para permitir un movimiento continuo. Si la fuerza de amortiguación por fricción en seco es grande, resulta un movimiento discontinuo. Este último problema es de interés académico y tiene cierta importancia práctica, pero infortunadamente, las amplitudes de movimiento implicadas son por lo general pequeñas y con rareza críticas.

Si la fuerza de fricción en seco es pequeña en comparación con la función forzante armónica, se tiene disponible una solución aproximada que explica muchos de los fenómenos asociados con la amortiguación por fricción seca.

Si la fuerza de fricción es $\mu N$ y la amplitud es $X$, la energía disipada por cuarto de ciclo es $\mu NX$. Para un ciclo completo de movimiento, la energía disipada es

$$\Delta U = 4\mu NX \tag{7.25}$$

La energía disipada por ciclo, usando la constante de amortiguación viscosa equivalente, es

$$\Delta U = \pi c_{eq}\omega X^2 \tag{7.26}$$

Igualando la energía disipada por ciclo, obtenemos un factor de amortiguación viscosa equivalente, que se mide en términos de la fricción seca

$$2\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n} = 2\frac{c_{eq}}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{4\mu N}{\pi kX} \tag{7.27}$$

Sustituyendo este término de amortiguación equivalente en la Ec. 7.8, tenemos una expresión para la relación de amplitud

$$\frac{X}{F_1/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi kX}\right)^2}}$$

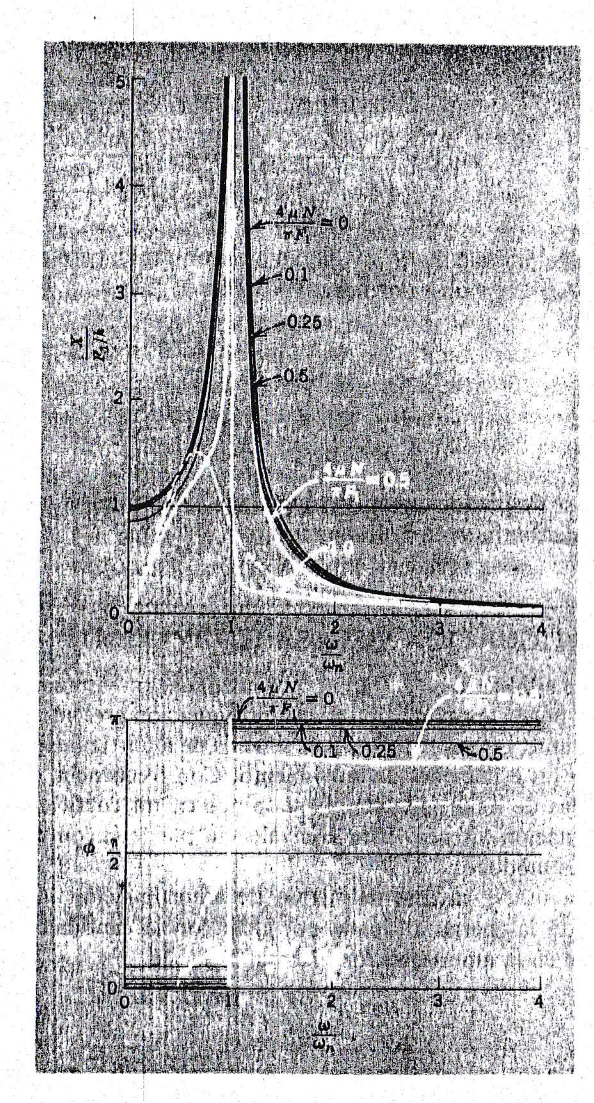
Esta contiene a $X$ dentro del radical. Elevando al cuadrado y resolviendo algebraicamente, la relación de amplitud es

$$\frac{X}{F_1/k} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_1}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} \tag{7.28}$$

Esta es una expresión satisfactoria para la relación de amplitud si $F_1/\mu N > 4/\pi$. Si $F/\mu N < 4/\pi$, el numerador de la fracción bajo el radical es negativo, el radical es imaginario y no se puede usar la solución aproximada. En realidad, ésta se encuentra en grave error si $F_1/\mu N < 1/2$. En la Fig. 7.13 se muestra en trazo blanco, para referencia, la solución exacta, según la derivación de Dea Hart^g.



Fig. 7.13




En la resonancia, la amplitud de movimiento no se limita por la amortiguación de fricción seca que se encuentre presente. La energía disipada en la fricción en seco, es proporcional a la fuerza de fricción y a la amplitud de movimiento. La aportación de trabajo de la función forzante armónica, es también proporcional a la magnitud de la fuerza y a la amplitud de movimiento. Así, en tanto que la fuerza de fricción sea menor que la fuerza aplicada, la amplitud aumentará ilimitadamente.

El ángulo de fase se puede encontrar de un modo sencillo.

$$\tan\phi = \frac{\dfrac{4\mu N}{\pi k X}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{\dfrac{4\mu N}{\pi F_1}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\sqrt{\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}{1-\left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_1}\right)^2}}$$

Para un valor dado de $F_1/\mu N$, la tan $\phi$ es constante, pero con un valor positivo de $\omega/\omega_n < 1$, y un valor negativo para $\omega/\omega_n > 1$,

$$\tan\phi = \pm\frac{\dfrac{4\mu N}{\pi F_1}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_1}\right)^2}} \tag{7.29}$$

De esto se desprende que, para amortiguación por fricción seca, el ángulo de fase es discontinuo en la resonancia.

## 7.8 AMORTIGUACION VISCOSA EQUIVALENTE

Como se estableció en el Cap. 6, la amortiguación viscosa puede o no constituir una buena aproximación de la amortiguación presente en un sistema real. No obstante, ésta es la forma más sencilla de amortiguación por usar, ya que linealiza las ecuaciones de movimiento. Con frecuencia, se agrupan formas complejas de amortiguación en términos de un coeficiente equivalente de amortiguación viscosa. Esta equivalencia puede encontrarse en cualquiera de varios modos.

Se ha usado ya una definición de amortiguación viscosa equivalente. Igualando la energía disipada por ciclo con la cantidad de energía que se disiparía en la amortiguación viscosa, Ec. 7.26.

$$c_{eq} = \frac{\Delta U}{\pi\omega X^2} \tag{7.30}$$

Otra definición de amortiguación viscosa equivalente, es que ésta es la cantidad de amortiguación viscosa que limitaría la relación de amplitud en la resonancia al valor observado experimentalmente.

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = \frac{1}{2\left[\dfrac{X}{F_1/k}\right]_{\omega=\omega_n}}$$

Deberá notarse que el método se puede extender para frecuencias diferentes de la de resonancia. La aportación de energía por ciclo para la fuerza ar-



mónica, $F_1$ sen $\omega t$, es $F_1 X\pi$ sen $\phi$. La energía disipada en amortiguación, por ciclo, es $c_{eq}X^2\pi\omega$. Igualando la aportación de energía desde la fuerza impuesta, la energía absorbida en la amortiguación

$$c_{eq} = \frac{F}{X\omega}\,\text{sen}\,\phi \tag{7.31}$$

Esta es idéntica con el resultado anterior para $\omega = \omega_n$, excepto por la referencia al ángulo de fase. No obstante, puede ser difícil medir el ángulo de fase del movimiento. En la resonancia, sen $\phi = 1$ y el resultado de la Ec. 7.31 llega a ser idéntico con el de la Ec. 7.30.

Un tercer método usado para calcular la amortiguación equivalente, se refiere a la anchura de la curva de respuesta en la resonancia. Esto tiene aplicación en las pruebas de resonancia y es particularmente útil cuando la amortiguación es leve y se ha probado sólo una porción del espectro de frecuencia de respuesta. El uso de anchura de la curva de respuesta, implica determinar con precisión las frecuencias para las cuales tan $\phi = \pm 1$. Haciendo referencia a la figura mostrada, una de éstas ocurrirá en $\omega_a$ levemente debajo de la frecuencia resonante. La otra ocurrirá levemente arriba de la frecuencia resonante, en $\omega_b$.

De la Ec. 7.11 para tan $\phi = 1$,

$$\frac{c_{eq}\omega_a}{m(\omega_n^2-\omega_a^2)} = 1$$

para $\tan\phi = -1$,

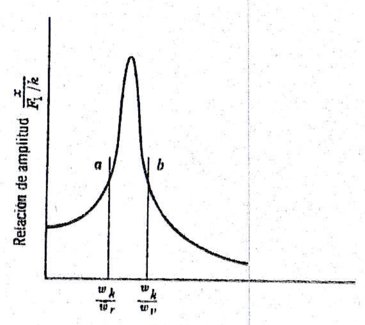
$$\frac{c_{eq}\omega_b}{m(\omega_n^2-\omega_b^2)} = -1$$

Sumando $c\omega_a$ a $c\omega_b$

$$c_{eq}(\omega_a+\omega_b) = m(\omega_b^2-\omega_a^2)$$

y

$$c_{eq} = m(\omega_b-\omega_a) \tag{7.32}$$



El problema en usar esta técnica consiste en que es muy difícil medir con precisión el ángulo de fase. No obstante, se evita la resonancia y la constante de amortiguación viscosa equivalente medida de esta manera, es mucho mejor que un promedio en comparación a si se tomara del valor único en la resonancia. Usando $c_{cr} = 2m\omega_n$

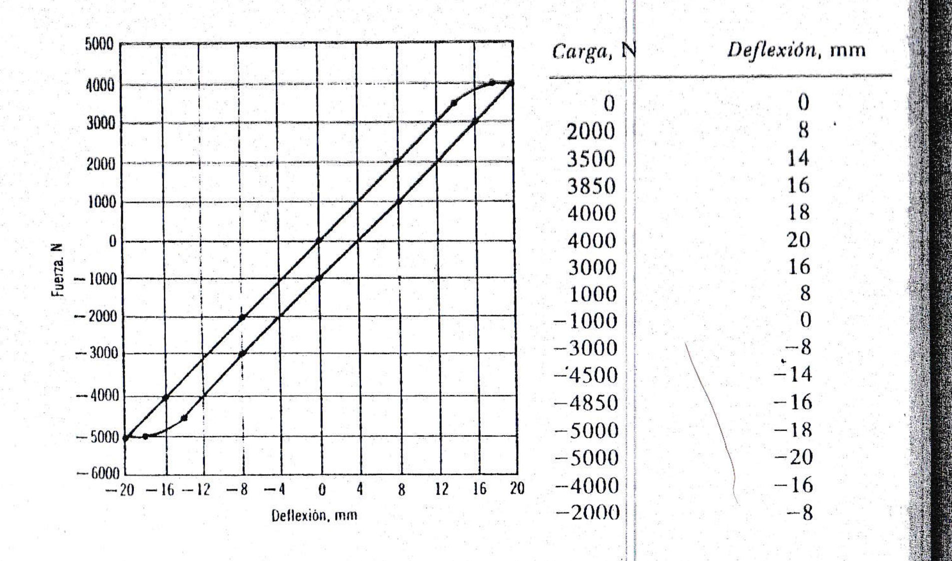
$$\zeta_{eq} = \frac{(\omega_b - \omega_a)}{2\omega_n} \tag{7.33}$$

Este método se usa para medir la amortiguación presente en la vibración torsional de motores de combustión interna. Sólo requiere una porción angosta de la curva de resonancia que por lo general es todo lo que es posible obtener, ya que por abajo de una velocidad mínima un motor de combustión interna se rehusará simplemente a trabajar.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 7.20*

Calcúlese para el Prob. Ej. 6.15, el valor del parámetro adimensional $X/(F_1/k)$ en la resonancia bajo una vibración forzada amortiguada, $F(t) = F_1$ sen $\omega t$.




| *Carga*, N | *Deflexión*, mm |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2000 | 8 |
| 3500 | 14 |
| 3850 | 16 |
| 4000 | 18 |
| 4000 | 20 |
| 3000 | 16 |
| 1000 | 8 |
| −1000 | 0 |
| −3000 | −8 |
| −4500 | −14 |
| −4850 | −16 |
| −5000 | −18 |
| −5000 | −20 |
| −4000 | −16 |
| −2000 | −8 |



***Solución:***
Del Prob. Ej. 6.15, $h$ = 28.65 N/mm, y $k$ = 250 N/mm. La amplitud máxima con amortiguación histerésica es

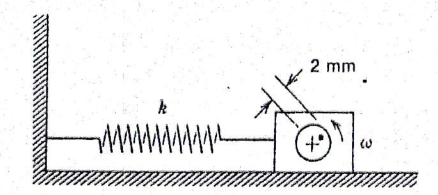
$$\frac{X}{F_1/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}}$$

En la resonancia, $\omega = \omega_n$, y

$$\left(\frac{X}{F_1/k}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{k}{h} = \frac{250}{28.65} = 8.73$$

## *PROBLEMA EJEMPLO 7.21*

Se muestran otra vez el resorte y la masa del Prob. 6.27. En este caso, una cuarta parte de la masa está contenida en un rotor que gira con una velocidad angular $\omega$, con una excentricidad de 2 mm. El coeficiente cinético de fricción seca es 0.1. La masa es de 15 kg y el módulo del resorte es de 1 800 N/m. ¿Cuál es la amplitud del movimiento en $\omega$ = 100 s$^{-1}$? ¿Qué sucede cuando $\omega$ = 10 s$^{-1}$? ¿Qué significa esto físicamente?




***Solución:***
La fuerza aplicada es $F(t)m_0\omega^2e$ sen $\omega t$. Con las constantes del sistema dado, para $\omega$ = 10 s$^{-1}$,

$$F_1 = m_0\omega^2 e = \left(\frac{15}{4}\right)(0.002)(10)^2 = 0.75 \text{ N}$$

y

$$\frac{\mu N}{F_1} = \frac{\mu N}{m_0\omega^2 e} = \frac{0.1(15)(9.806)}{0.75} = 19.6$$

Ya que $19.6 > \pi/4$, el movimiento es improbable. La fuerza aplicada no es suficiente para vencer la fricción estática.

Para $\omega = 100\ s^{-1}$, es otra cosa muy diferente. En este caso,

$$F_1 = m_0\omega^2 e = \left(\frac{15}{4}\right)(0.002)(100)^2 = 75\ N$$

$$\frac{\mu N}{F_1} = \frac{\mu N}{m_0\omega^2 e} = \frac{(0.1)(15)(9.806)}{75} = 0.196\ N$$

Ahora, el movimiento es posible, y éste es continuo, ya que $0.196 < \pi/4$. Se puede encontrar la amplitud usando la Ec. 7.28.

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{1800}{15} = 120\ s^{-2}$$

$$\frac{X}{F_1/k} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\mu N}{F_1}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{\pi}(0.196)\right)^2}{\left(1-\frac{100^2}{120}\right)^2}} = 0.107$$

$$X = \frac{75}{1800}(0.107) = 4.4\ mm$$

---

**PROBLEMA 7.22**

Repítase el Prob. Ej. 7.20 usando amortiguación histerésica cuando las amplitudes sucesivas de la vibración libre se han reducido a la mitad.

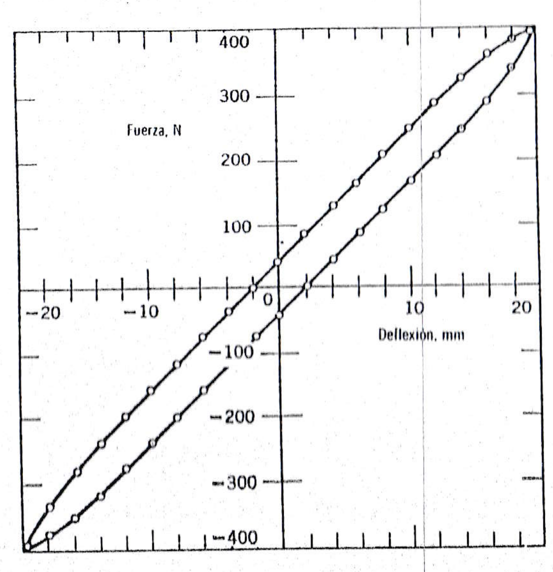
**PROBLEMA 7.23**

Repítase el Prob. Ej. 7.20, usando cuatro aisladores hechos a partir de los resortes helicoidales del Prob. 6.18.

**PROBLEMA 7.24**

Se monta el motor eléctrico del Prob. 4.10 en 16 aisladores de hule que presentan las características fuerza-deformación mostradas.






(a) ¿Cuál es el valor del parámetro adimensional MX/me para la vibración forzada resonante usando los aisladores?
(b) ¿Cuál es la relación de transmisión para $\omega$ = 1 800 rpm?

**PROBLEMA 7.25**

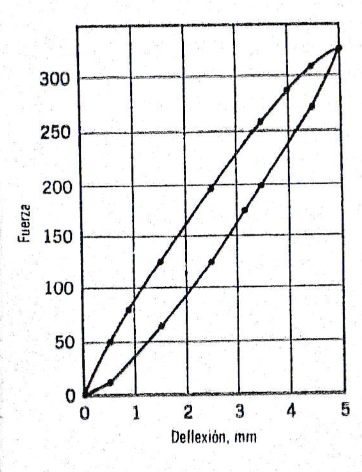
Repítase el Prob. 7.16 suponiendo amortiguación histerésica.

Respuesta: 6.14 mm

**PROBLEMA 7.26**

Se monta un pequeño instrumento electrónico de 20 kg en el tablero de un aeroplano, sobre cuatro aisladores de hule que se deforman 3 mm bajo la carga. El instrumento debe aislarse de una excitación dominante de 1 200 cpm. Se muestra la curva carga-deformación para los aisladores de hule. ¿Cuál es la relación de transmisión de la vibración transmitida al instrumento montado?

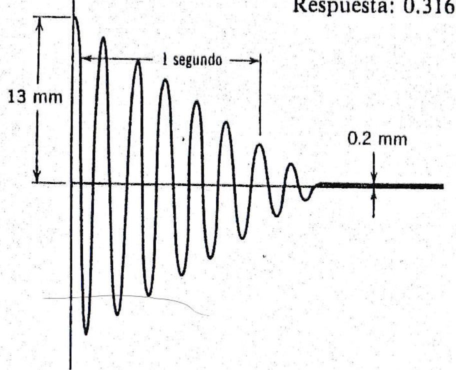
Respuesta: 0.266

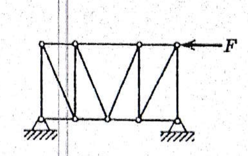


**PROBLEMA 7.27**
Se monta un dispositivo electromecánico sobre un juego de aisladores de hule. El sistema presenta una relación de amplitud de resonancia de 5. ¿Arriba de qué relación de frecuencia se reducirá a un cuarto la transmisión de fuerza si
(a) se ignora la amortiguación,
(b) se supone amortiguación viscosa,
(c) se supone amortiguación histerésica?

**PROBLEMA 7.28**
Una estructura de marco ligera, muestra el trazo amplitud-tiempo indicado para vibración libre amortiguada. El marco se deforma 2 mm bajo una fuerza de 500 N. ¿Cuál será la amplitud aproximada de movimiento si se reemplaza la fuerza $F$ por la fuerza armónica $F = 500$ sen $\omega t$, en la que $\omega = 960$ rpm?

Respuesta: 0.316 mm.




**PROBLEMA 7.29**
La biela del Prob. 2.36 y del Prob. 6.30, se somete a una pequeña pareja oscilante $M(t) = 0.1$ sen $20\,t$, en la que la pareja se mide en N·m. ¿Cuál es la amplitud aproximada del movimiento de estado-estable?

**PROBLEMA 7.30**
Para el Prob. 6.26, el resorte tiene una constante de 12 500 N/m. Determínese la amplitud del movimiento de estado-estable, si se aplica una fuerza $F(t) = 10$ sen $\omega t$ a la masa $m$. $F(t)$ oscila con una frecuencia armónica de 1 200 rpm.

Respuesta: 0.1 mm



## 7.9 VIBRACION ALEATORIA

Recibe el nombre de vibración aleatoria, aquella vibración que no se puede describir como periódica. No existe en este caso patrón para la frecuencia o la amplitud y tampoco se aplican los métodos acostumbrados para analizar el movimiento periódico por medio de armónicas. No obstante, este movimiento se puede tratar estadísticamente, y se ha reunido, usando como base la estadística, una cantidad considerable de conocimiento acerca del mismo.

La vibración aleatoria tiene un lenguaje propio. La información medida es diferente de la información acerca de la vibración usual, y la respuesta se establece en términos de la probabilidad de que ocurran cierta amplitud o aceleración. Los términos *banda angosta* y *banda ancha* se usan ambos para describir la vibración aleatoria. Estos constituyen descripciones cuantitativas que se utilizan de manera más bien informal para describir el espectro de vibración.

Si el movimiento es en realidad aleatorio, no existiría frecuencia dominante ni amplitud dominante. El movimiento puede describirse a través de un intervalo de tiempo dado, $\tau$, por medio del término amplitud *media cuadrática*,

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2\,dt \tag{7.34}$$

o por el valor de la *raíz cuadrada de la media cuadrática*,

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2\,dt}$$

Para simplificar el análisis, supondremos que éste es un proceso estacionario, lo que significa que la raíz del promedio cuadrático es independiente del tiempo durante el cual se tomaron las mediciones.

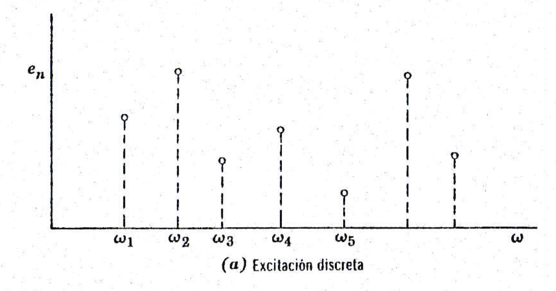
Por medio de esta simplificación se puede pronosticar con mucha facilidad la respuesta de un sistema lineal de grado único de libertad a la excitación aleatoria. Si ocurre una excitación a una frecuencia $\omega_1$, la respuesta a una fuerza senoidal $F_1$ sen $\omega_1 t$, es $r_1 = e_1 y_1$ en donde $y_1$ es la relación de amplitudes en $\omega = \omega_1$, y $e_1$ es la excitación, en este caso $e_1 = F_1/k$ sen $\omega_1 t$. Si la excitación ocurre a una frecuencia $\omega_2$, la respuesta es $r_2 = e_2 y_2$. Si estas dos excitaciones ocurren conjuntamente, es posible sumarlas por superposición, ya que estamos tratando con un sistema lineal. La respuesta de raíz cuadrada de promedio cuadrático es

$$\bar{r}_{1+2} = \sqrt{(e_1 y_1)^2 + (e_2 y_2)^2}$$

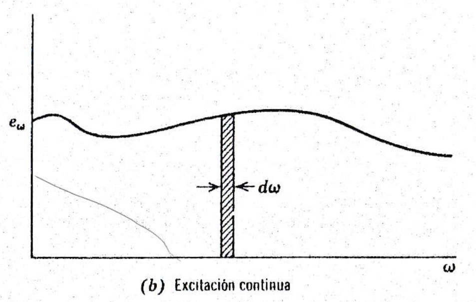
Para $n$ excitaciones discretas, como en la Fig. 7.14a, todas ocurrentes al mismo tiempo, la respuesta de raíz cuadrada de promedio cuadrático es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos los productos de relación y amplitud.

$$\bar{r}_n = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (e_n y_n)^2} \tag{7.35}$$

Fig. 7.14




(a) Excitación discreta




(b) Excitación continua

En cada caso, ya sea debido a una, dos o $n$ excitaciones discretas, si la excitación está en términos de la amplitud, o el parámetro $F/k$, la respuesta es una amplitud, si la excitación es una aceleración, la respuesta es una aceleración. La relación de amplitud es adimensional.

Para un espectro continuo de frecuencias, en la Fig. 7.14b, la suma discreta se reemplaza por una integral. La excitación es ahora una función continua de la frecuencia en lugar de una expresión discreta de sólo una frecuencia.

$$\bar{R} = \sqrt{\int_0^\infty (e_\omega y_\omega)^2 \, d\omega} \tag{7.36}$$

El símbolo $\bar{R}$ se usa para denotar la respuesta de un espectro aleatorio.

Para ser correcta, la excitación $e_\omega$ debe estar en unidades de amplitud o en unidades de aceleración por radián por segundo a la potencia ½. $e_\omega{}^2$ es la *densidad media de amplitud espectral* elevada al cuadrado, $m^2$-s si la respuesta es una amplitud, o la densidad *promedio espectral de aceleración, elevada al cudrado,* $g^2$-s, si la respuesta está en términos de aceleración. Ocasionalmente se llamará a esto también la *densidad espectral potencial,* pero éste es un término desviativo y debe evitarse. Algunas veces se acorta simplemente a *densidad espectral.*

La densidad espectral cuadrada media, es una cantidad medible. Una salida tal como el voltaje procedente de un instrumento sísmico se alimenta a través de un filtro de paso de banda y se promedia a través de un intervalo largo

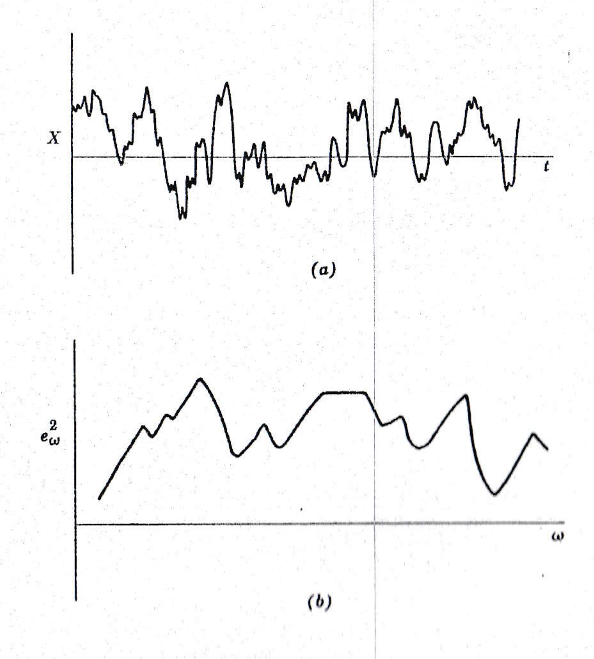


de tiempo $\tau$. El resultado es una cantidad medida que es la densidad espectral cuadrática media de la salida del instrumento sísmico. Esta es también una función del ancho de banda que admitirá el filtro de paso de banda, su frecuencia central y del intervalo de tiempo $\tau$, pero todos éstos son conocidos. La salida puede registrarse o ser indicada en un medidor.

La vibración aleatoria de *banda ancha* es un proceso aleatorio estacionario en el cual la densidad espectral de promedio cuadrático es relativamente constante en valor a través de un espectro ancho, en general de por lo menos la mitad del espectro total. La Fig. 7.15a, muestra un vibración aleatoria de banda ancha, como aparecería ésta en función del tiempo, y la Fig. 7.15b es una graficación típica de una densidad espectral de promedio cuadrático. El entorno de vibración asociado con el encendido de un cohete, constituye típicamente un proceso aleatorio de banda ancha.

La vibración aleatoria de *banda angosta,* es un proceso estacionario en el cual la densidad espectral de promedio cuadrático es conmensurablemente insignificante a través de una gama angosta de secuencias. Esto es típico de los sistemas resonantes, en los que una función forzante con una o más frecuencias cercanamente relacionadas fuerza al movimiento. La respuesta exhibe pulsaciones y la amplitud varía mucho, pero la frecuencia no lo hace. Las Figs. 7.16a y b muestran una vibración aleatoria de banda angosta, presentando información real de la vibración inducida por el viento en cables de líneas de transmisión. En este caso, la liberación periódica de vórtices induce

Fig. 7.15



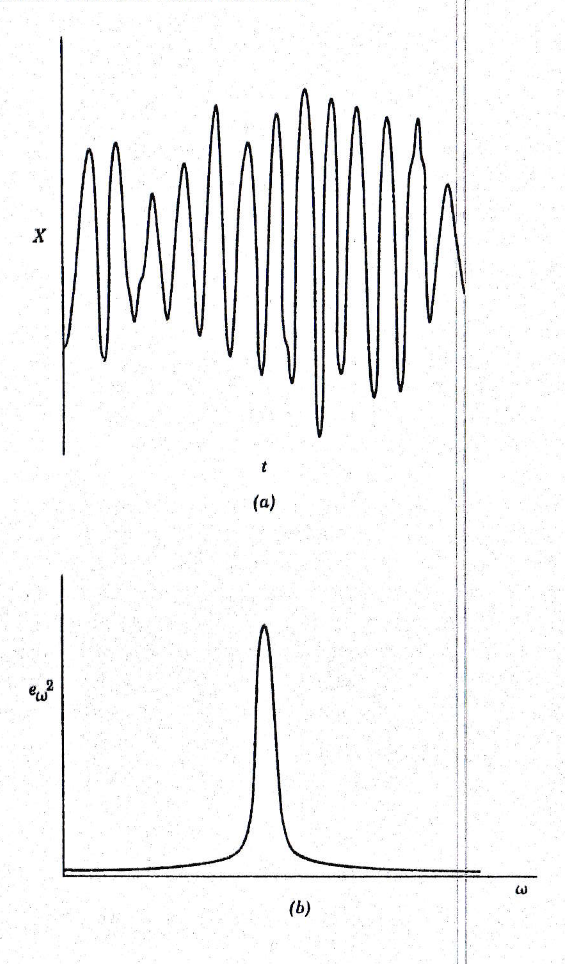



Fig. 7.16 (a) (b)

a una fuerte vibración forzada resonante que constituye un verdadero proceso aleatorio de banda angosta.

Usando la vibración aleatoria, se resuelven clínicamente dos clases de problemas. El primero es el de calcular estadísticamente el tiempo probable de falla, dado un cierto espectro de vibración. El segundo es el de pronosticar la respuesta del sistema a cierta densidad espectral de excitación, conociendo las características de resonancia de éste.

Una excitación aleatoria que es constante para todas las frecuencias, se denomina *"ruido blanco"*, ya que contiene todas las frecuencias, todas con amplitud uniforme. La respuesta de un sistema de grado único de libertad al ruido blanco, es una de las relaciones más importantes con que cuenta el ingeniero en vibraciones.



$$\bar{R}^2 = \int_0^\infty (e_\omega y_\omega)^2\, d\omega$$

$$= e_\omega^2 \int_0^\infty (y_\omega^2)\, d\omega$$

$$= e_\omega^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= e_\omega^2 \omega_n \frac{\pi}{2} Q \qquad (7.37)$$

Esta es simple y directa, y se pueden aproximar muchas vibraciones aleatorias como ruido blanco, evitando un análisis más complicado. Esto requiere sólo el nivel de excitación, la frecuencia natural $\omega_n$, y el nivel de amortiguación expresado por el factor $Q$. Cuando se desea la respuesta de promedio cuadrático en términos de unidades de desplazamiento y se conoce la excitación en términos de unidades de aceleración al cuadrado por radián por segundo, dividiendo por $\omega_n 4$

$$\bar{x}^2 = \frac{\pi e_\omega^2 Q}{2\omega_n^3} \qquad (7.38)$$

Si no se puede hacer una aproximación de ruido blanco, se puede calcular numéricamente la respuesta, y la Ec. 7.36 se torna

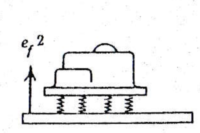
$$\bar{R} = \sqrt{\sum (e_\omega y_\omega)^2 \Delta\omega} \qquad (7.39)$$

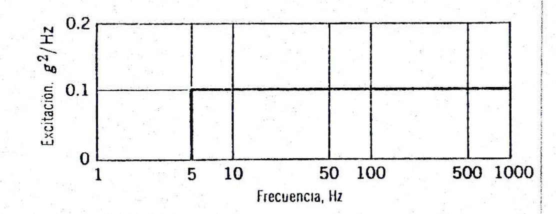
En este caso, debe seleccionarse un ancho de banda $\Delta\omega$ adecuado. La excitación $e_\omega$ y el factor de amplificación $y_\omega$ se aplican sólo sobre cada anchura de banda. El problema de ejemplo muestra cómo se aplica lo anterior.

---

### *PROBLEMA EJEMPLO 7.31*

En pruebas reales, se ha dañado el empaque de un instrumento aeronáutico debido a una vibración senoidal que excede el límite de 2.5 g. Determínese la deformación estática necesaria de los aisladores que pueden proteger de daño al empaque de una vibración aleatoria de 0.1 g²/Hz de 5 a 2 000 Hz. Supóngase que los aisladores están fabricados con hule sintético para el cual $\zeta = 0.05$.




***Solución:***
Este es un problema sencillo que implica "ruido blanco" a una densidad constante de $e_f^2 = 0.1$ g²/cps. La respuesta de raíz cuadrada de promedio cuadrático, $\bar{R}$ será

$$\bar{R} = \sqrt{e^2 \omega_n \frac{\pi}{2} Q} = 2.5 \text{ g}$$

Escrito en unidades de g²-s/radián

$$e^2 = \frac{0.1}{2\pi}$$

el factor de amortiguación se expresa como $Q$,

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2(0.05)} = 10$$

Resolviendo para la frecuencia natural, $\omega_n$

$$(2.5)^2 = \left(\frac{0.1}{2\pi}\right)\omega_n\left(\frac{\pi}{2}\right)(10)$$

$$\omega_n = 25 \text{ s}^{-1}$$

Retornando a la teoría de la vibración simple, la deflexión estática será

$$\omega_n^2 = \frac{g}{\Delta_{st}}$$

o

$$\Delta_{st} = \frac{9.806}{(25)^2} = 0.0157 \text{ m}$$

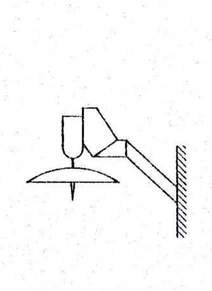
---

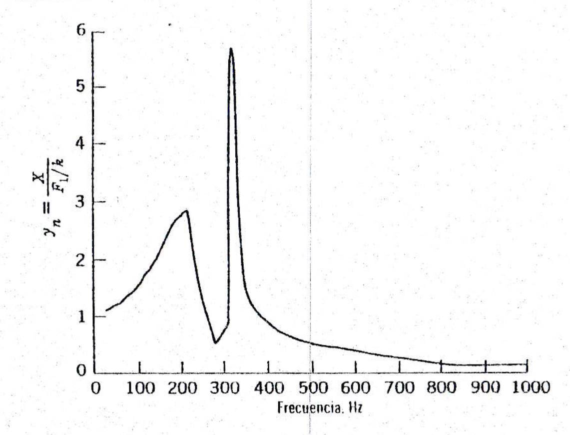
## *PROBLEMA EJEMPLO 7.32*

Se monta un instrumento en una estructura de artefacto espacial, de tal manera que, la respuesta en una dirección presenta las características modales mostradas. Lo anterior ha sido predeterminado en una prueba de resonancia en la que un acelerómetro medía la aceleración y el desplazamiento a través de un espectro de frecuencia predeterminado. En resumen, existen dos máximos entre 20 y 1 000 Hz.



(a) Si $\sigma$ es la amplitud de vibración normalizada o de raíz cuadrada de promedio cuadrático, ¿cuál es la longitud de tiempo antes de que la amplitud exceda primero a 5 $\sigma$ con una confiabilidad de 0.99?
(b) Determínese la respuesta de promedio cuadrático del instrumento a una densidad de espectro de aceleración constante de 0.01 g²/Hz.
(c) Determínese la respuesta de promedio cuadrático del instrumento a una densidad espectral variable.






***Solución:***
(*a*) Suponiendo un proceso estacionario gaussiano, con promedio cero, la frecuencia a la cual la amplitud $x$ excede a la amplitud $\sigma$, de raíz cuadrada de promedio cuadrático, es

$$\nu = fe^{-x^2/2\sigma^2}$$

$f$ es la frecuencia de banda media que en este caso es $f$ = 490 cps. Para que la confiabilidad sea de 0.99, la probabilidad de que ocurra el evento es $P(t)$ = 0.01. El periodo entre tiempos sucesivos en que la amplitud excede de 5 veces el promedio cuadrático es entonces

$$\tau = \frac{P(t)}{\nu} = \frac{0.01e^{(5)^2/2}}{490} = 5.5 \text{ segundos}$$

Si hubiéramos deseado una confiabilidad de 0.999 que es una probabilidad de 0.001, sólo habríamos contado con 0.55 s. Con toda probabilidad, el tiempo sería mucho mayor, pero la vibración aleatoria se estudia estadísticamente, y en esto se hace necesaria una declaración de confiabilidad y probabilidad. En el diseño de artefactos espaciales en los que la falla de cualquiera de una gran serie de componentes puede significar la falla del sistema total, no son raras las confiabilidades de 0.99 y 0.9999. Ya que esta cadena es acumulativa, el

efecto general es que las pruebas son muy costosas y los componentes se sobrediseñan y aún se usan componentes redundantes si el componente es por completo crítico.

(*b*) Para la respuesta de promedio cuadrático a una densidad espectral de aceleración constante de 0.01 $g^2/Hz$, se divide la curva de respuesta modal en bandas finitas con una relación constante de amplitud para el ancho de banda seleccionado. Se tabula entonces la respuesta de promedio cuadrático elevando al cuadrado la relación de amplitudes $y_n$, elevando al cuadrado la excitación $e_n$, y multiplicando el producto $(e_n y_n)^2$ por el ancho de banda $\Delta f_n$. La respuesta de promedio cuadrático, es entonces la raíz cuadrada de la suma

$$\bar{R} = \sqrt{\sum_{20}^{1000} (e_n y_n)^2 \, \Delta f_n} = 5.146 \text{ g}$$

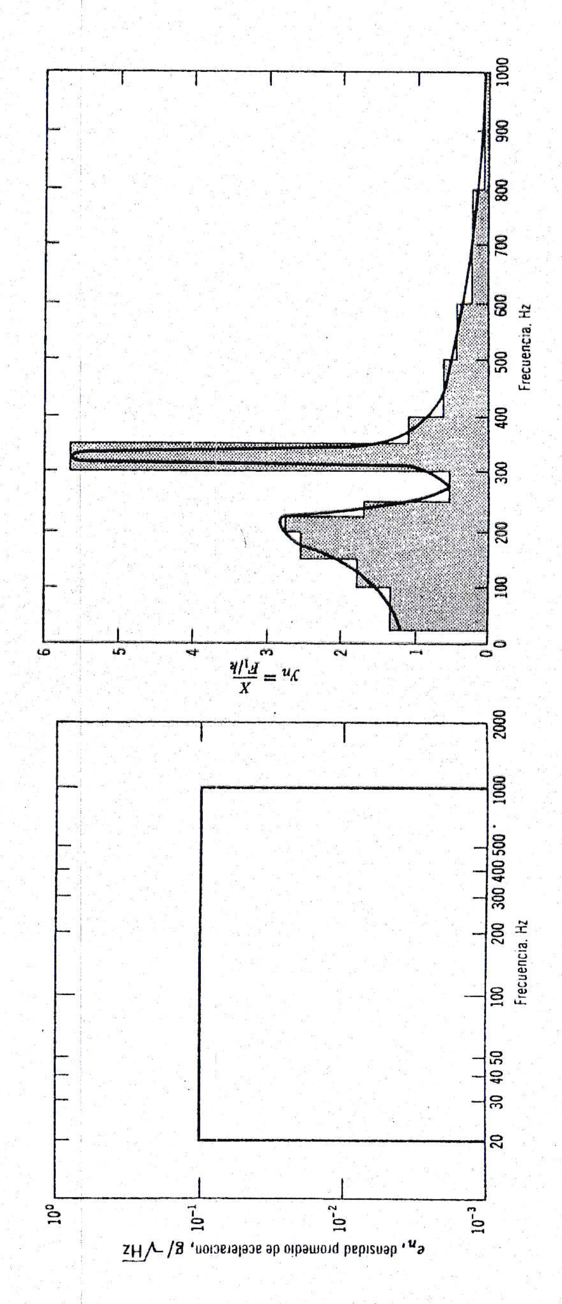
***Respuesta de vibración aleatoria a una densidad de espectro constante***

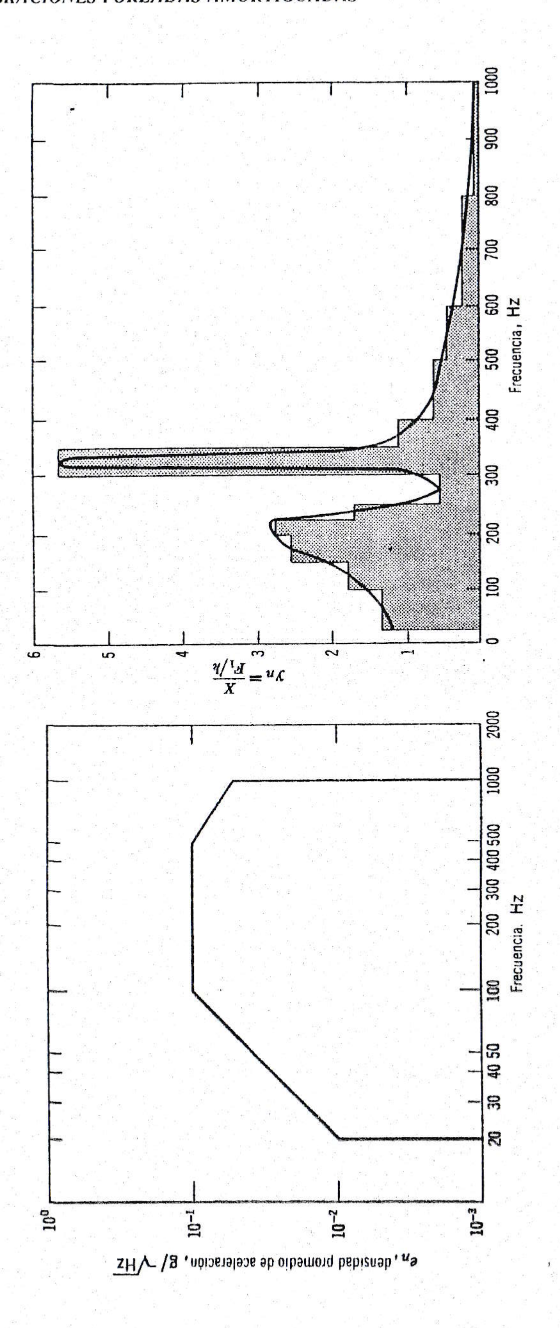
| $f_n$ | $y_n$ | $e_n$ | $\Delta f_n$ | $(e_n v_n)^2 \Delta f_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 1.3 | 0.1 | 80 | 1.352 |
| 125 | 1.8 | 0.1 | 50 | 1.620 |
| 175 | 2.6 | 0.1 | 50 | 3.380 |
| 210 | 2.8 | 0.1 | 20 | 1.568 |
| 235 | 1.7 | 0.1 | 30 | 0.869 |
| 275 | 0.5 | 0.1 | 50 | 16.245 |
| 325 | 5.7 | 0.1 | 50 | 0.125 |
| 375 | 1.1 | 0.1 | 50 | 0.605 |
| 450 | 0.6 | 0.1 | 100 | 0.360 |
| 550 | 0.4 | 0.1 | 100 | 0.160 |
| 700 | 0.2 | 0.1 | 200 | 0.160 |
| 900 | 0.1 | 0.1 | 200 | 0.040 |

Brevemente, esto establece que la respuesta de promedio cuadrático excederá de 5.146g durante 32% del tiempo, 10.29% durante 4.6% del tiempo, y 15.44g durante 0.27 del tiempo. Queda a cargo de ingeniero el juicio sobre si este diseño podrá resistir su cercanía.

(*c*) Para la respuesta de promedio cuadrático a una densidad espectral de aceleración variable, se usa el mismo procedimiento. Ya que la densidad de aceleración es menor a las frecuencias más altas y más bajas, la respuesta de promedio cuadrático es menor.










| $f_n$ | $y_n$ | $e_n$ | $\Delta f_n$ | $(e_n y_n)^2 \Delta f_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 1.3 | 0.037 | 80 | 0.185 |
| 125 | 1.8 | 0.100 | 50 | 1.620 |
| 175 | 2.6 | 0.100 | 50 | 3.380 |
| 210 | 2.8 | 0.100 | 20 | 1.568 |
| 235 | 1.7 | 0.100 | 30 | 0.869 |
| 275 | 0.5 | 0.100 | 50 | 0.125 |
| 325 | 5.7 | 0.100 | 50 | 16.245 |
| 375 | 1.1 | 0.100 | 50 | 0.605 |
| 450 | 0.6 | 0.100 | 100 | 0.360 |
| 550 | 0.4 | 0.080 | 100 | 0.102 |
| 700 | 0.2 | 0.070 | 200 | 0.039 |
| 900 | 0.1 | 0.055 | 200 | 0.006 |

Tabulando y tomando otra vez la raíz cuadrada de la suma $(e_n y_n)^2 \Delta f_n$,

$$\bar{R} = \sqrt{\sum_{20}^{1000} (e_n y_n)^2 \Delta f_n} = 4.462 \text{ g}$$

**PROBLEMA 7.33**

Determínese el desplazamiento de raíz de promedio cuadrático para el bastidor espacial del Prob. 7.8, en respuesta a un ruido blanco con una densidad de excitación constante de 4 g²/Hz.

**PROBLEMA 7.34**

Se monta la envolvente de un instrumento electrónico sobre cuatro aisladores de hule que se deforman 5 mm bajo la carga estática. ¿Cuál es la excitación de "ruido blanco" que se puede sostener, si la respuesta debe limitarse a 4g? Se sabe que la amortiguación es de $\zeta = 0.05$.

Respuesta: $e^2 = 0.036\text{g}^2/\text{Hz}$

**PROBLEMA 7.35**

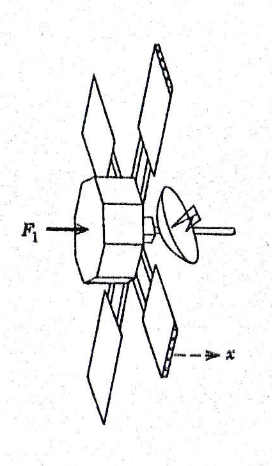
Los tableros solares de un artefacto espacial, pueden modelarse como dos vigas en voladizo simétricamente dispuestas. Durante la prueba de resonancia, la estructura muestra un máximo notable de 82 Hz, pero no se observa algún modo más alto por abajo de 1 000 Hz. La amortiguación es histerésica, de $\zeta = 0.1$

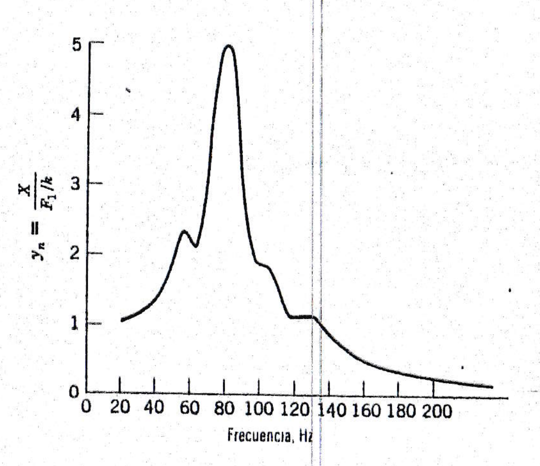
(a) Determínese la aceleración de raíz cuadrada de promedio cuadrático, en respuesta al ruido blanco con una densidad de excitación constante de 0.1 $g^2$/Hz.

(b) Determínese la aceleración de raíz cuadrada de promedio cuadrático en respuesta a una densidad de excitación constante de 0.1 $g^2$/Hz, si la excitación se limita a un espectro desde 20 Hz a 2 000 Hz solamente.

**PROBLEMA 7.36**

¿Cuál será el efecto añadido del espectro desde 200 Hz a 1 000 Hz si no se observa pico de resonancia entre estas frecuencias?




**PROBLEMA 7.37**

Determínese la respuesta de aceleración de raíz de promedio cuadrático de la antena de alta ganancia mostrada en la Fig. del Prob. 7.33, a una densidad de excitación constante de 0.1 $g^2$/Hz a través de todo el espectro desde 20 Hz hasta 1 000 Hz, si la antena muestra un pico de resonancia a 400 Hz.

Respuesta: $\overline{R} = 17.7$ g.

# OCHO

# DOS GRADOS DE LIBERTAD

## 8.1 VIBRACION LIBRE Y LA ECUACION DE FRECUENCIA

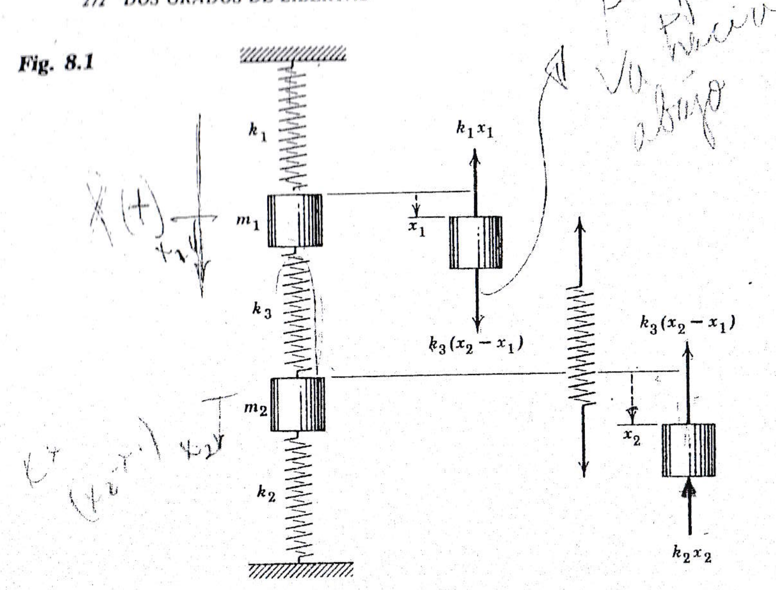
Aun cuando es posible simplificar la dinámica de los sistemas complejos y utilizar un grado de libertad para aproximar resultados en muchos de éstos, algunas veces simplemente no se puede hacer. Una coordenada única puede no ser suficiente para describir el movimiento. Pueden necesitarse dos o más coordenadas generalizadas. También, el sistema puede tener más de una masa. Estos aspectos de la dinámica no se pueden aproximar sin afectar algunos de los varios resultados que deseamos obtener.

Estos sistemas tienen más de un grado de libertad, y se llaman sistemas de grado múltiple de libertad. En lugar de una condición de resonancia, existen varias. Cada condición resonante tiene su propia forma de modo característica. El estudio de los sistemas de grado múltiple de libertad es elaborado, pero los principios implicados para estos varios grados de libertad se pueden establecer con solamente dos. Si se comprende lo que sucede en un sistema con dos grados de libertad, es fácil extender esta comprensión a varios grados de libertad. Las diferencias principales entre uno y dos grados de libertad, son más que las diferencias entre dos y diez grados.

Como ejemplo, con el sistema de dos masas de la Fig. 8.1 restringido a moverse en sólo una dirección, el sistema tiene dos grados de libertad. Si estas dos masas son libres de moverse en un espacio tridimensional, cada una de ellas tendrá tres grados de libertad y se harán necesarias seis coordenadas para describir su movimiento. Según esto, se necesitarán ambas coordenadas generalizadas $x_1$ y $x_2$ para describir el movimiento de las masas $m_1$ y $m_2$. Considérese que la primera masa $m_1$ va a ser desplazada una distancia $x_1$ a partir de su posición de equilibrio, y que la masa $m_2$ va a ser desplazada una distan-



**Fig. 8.1**




cia $x_2$ a partir de su posición de equilibrio. No actúan fuerzas externas sobre ninguna de estas masas, lo que significa que el sistema vibra libremente. Aislando cada masa, para $x_2 > x_1$, las ecuaciones de movimiento son

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$$

$$-k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-k_2 x_2 - k_3(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \tag{8.1}$$

Estas dos ecuaciones pueden reescribirse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.2}$$

El uso de matrices es un modo estenográfico de expresar con conveniencia sistemas de ecuaciones simultáneas. La matriz

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

es la matriz de masa.



La matriz

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

es la matriz de rigidez. Cada una de éstas constituye un escalar que modifica un vector. Las matrices

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

son matrices de columna que representan cantidades vectoriales. También se hace referencia a éstas como de vectores columna. Posteriormente usaremos álgebra matricial para resolver sistemas de muchas ecuaciones de movimiento simultáneamente, pero en este momento es suficiente establecer que las ecuaciones diferenciales 8.1 y 8.2 son expresiones idénticas de las ecuaciones de movimiento. Estas son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, y constituyen la base para el análisis de la vibración de sistemas de dos grados de libertad.

Si se supone que el movimiento se realiza en un modo principal, ambas coordenadas generalizadas tendrán movimiento armónico de la misma frecuencia, $\omega$.

$$x_1 = X_1 \operatorname{sen} \omega t$$

$$x_2 = X_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Sustituyendo estas expresiones armónicas en las ecuaciones de movimiento, tendremos dos ecuaciones algebraicas con $X_1$, $X_2$, y $\omega^2$ como incógnitas.

$$X_1[k_1 + k_3 - m_1\omega^2] - k_3 X_2 = 0$$

$$X_2[k_2 + k_3 - m_2\omega^2] - k_3 X_1 = 0$$

En cada ecuación, la fracción $X_2/X_1$ puede determinarse en términos de las constantes del sistema, y de $\omega^2$. Igualando, se pueden eliminar $X_2$ y $X_1$.

$$X = \frac{X_2}{X_1} = \frac{k_1 + k_3 - m_1\omega^2}{k_3} = \frac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2\omega^2} \tag{8.3}$$

Esta fracción se denomina la *fracción modal*, ya que su valor determina el modo de movimiento.

Multiplicando en cruz, obtendremos una cuadrática en $\omega^2$.

$$(k_1 + k_3 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) = k_3^2$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)] + k_1 k_2 + k_3(k_1 + k_2) = 0 \tag{8.4}$$

La Ec. 8.4 se llama la *ecuación de frecuencia*, y las raíces de la ecuación de frecuencia son los valores característicos o valores propios del sistema. Ya

que estas frecuencias satisfacen la proposición original, de que todas las partes del sistema tienen la misma frecuencia armónica, $\omega$, sin ninguna aplicación de fuerza externa, éstas son frecuencias naturales. En el caso de dos grados de libertad, existen dos frecuencias naturales, cada una correspondiente a uno de los modos principales.

Como otro ejemplo, el sistema torsional de la Fig. 8.2, consiste de dos discos, cada uno con momento de inercia de masa, unidos por un resorte torsional, y fijos a una pared rígida por otro. Si se desplazan los discos alrededor del eje de las $z$ y se liberan, el sistema vibrará torsionalmente alrededor del eje $z$, y las coordenadas generalizadas que describen el movimiento de los discos y la distorsión de los resortes, serán $\theta_1$ y $\theta_2$. Las ecuaciones de movimiento para los desplazamientos angulares son,

$$\sum \mathbf{M} = I\ddot{\theta}$$

$$-K_1\theta_1 + K_2(\theta_2 - \theta_1) = I_1\ddot{\theta}_1$$
$$-K_2(\theta_2 - \theta_1) = I_2\ddot{\theta}_2 \qquad (8.5)$$

Para la vibración en un modo principal,

$$\theta_2 = \Theta_2 \operatorname{sen} \omega t$$
$$\theta_1 = \Theta_1 \operatorname{sen} \omega t$$

La fracción modal $\Theta_2/\Theta_1$ es

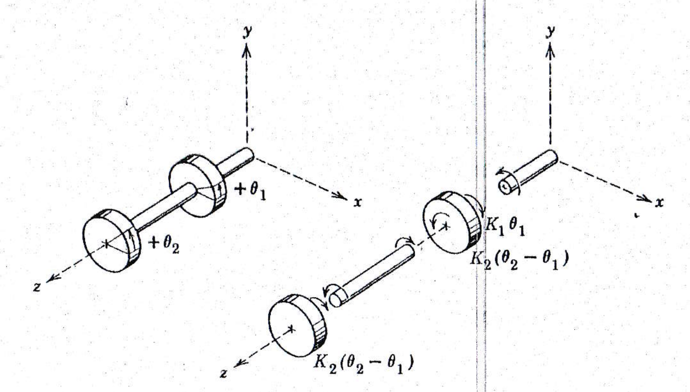
$$\chi = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{K_1 + K_2 - I_1\omega^2}{K_2} = \frac{K_2}{K_2 - I_2\omega^2} \qquad (8.6)$$

y esto nos da la ecuación de frecuencia

$$I_1 I_2 \omega^4 - \omega^2[I_1K_2 + I_2(K_1 + K_2)] + K_1K_2 = 0 \qquad (8.7)$$

Esta es otra vez cuadrática en $\omega^2$, con dos raíces.

Fig. 8.2






La existencia de una *ecuación de frecuencia* involucrando las constantes físicas del sistema, las raíces de la cual son los valores característicos o frecuencias naturales, es típica de los sistemas con grado múltiple de libertad. Para dos grados de libertad, es fácil establecer una ecuación de frecuencia y buscar algebraicamente los valores característicos. Esto se vuelve crecientemente difícil para grados múltiples de libertad, ya que aumenta el orden de la ecuación de frecuencia con el número de grados de libertad. Para tres grados de libertad, la ecuación de frecuencia tendrá tres raíces, para cuatro grados de libertad la ecuación de frecuencia será una ecuación de cuarto orden en $\omega^2$, y así sucesivamente. Para cualquier número mayor, deberemos buscar un medio para encontrar los valores característicos de la ecuación de frecuencia sin conocer la propia ecuación de frecuencia. El determinar la ecuación de frecuencia explícitamente, viene a ser un trabajo arduo, y existen otros modos de encontrar las raíces de las ecuaciones algebraicas, numéricamente. No obstante, es importante reconocer que cuando usamos métodos numéricos para determinar los valores característicos de un sistema de varios grados de libertad, estos valores característicos son las raíces de una ecuación de frecuencia que no hemos determinado, pero que, sin embargo, existe.

## 8.2 MODOS Y FRACCIONES MODALES

Un modo es una descripción del movimiento. Existen varias clases de modos, muchas con una frase modificante, tales como el primer modo, el segundo modo, un modo principal o un modo acoplado, todos los cuales describen una manera particular de movimiento.

A una frecuencia natural, un sistema vibratorio se mueve de un *modo principal*. Este modo se denomina también un modo natural. Si la amplitud de movimiento de una masa tiene una unidad de desplazamiento, se dice que el modo está normalizado o se le denomina simplemente un modo normal. Todas estas descripciones significan la misma cosa, que todas las partes del sistema tienen el mismo movimiento armónico, con desplazamientos máximos en tiempos idénticos y velocidades máximas en otros tiempos idénticos. El número de modos principales que existan, corresponderá al número de grados de libertad.

Las coordenadas que se usan para describir el movimiento, describen también el modo. Estas coordenadas no se establecen en cantidades absolutas, sino como relaciones numéricas. Esto es, se fija el valor de una coordenada con relación a todas las otras, para cualquier modo dado, y el valor absoluto de cualquier coordenada determina el valor de todas las demás coordenadas.

Como ejemplo, el valor de $X_2/X_1$ y de $\Theta_2/\Theta_1$ establece los modos de movimiento para los dos sistemas que hemos considerado. No existe diferencia en lo que realmente sean los valores absolutos de $\Theta_2$, $\Theta_1$, $X_2$ o $X_1$, ya que lo que

### *PROBLEMA EJEMPLO 8.2*

Determínense los dos modos principales correspondientes a las dos frecuencias naturales del Prob. Ej. 8.1.

***Solución:***
Las ecuaciones de movimiento para el sistema eran

$$X_1[2k - m\omega^2] - kX_2 = 0$$

y,

$$X_2[2k - m\omega^2] - kX_1 = 0$$

Sustituyendo el valor característico de $\omega^2 = k/m$ en la primera ecuación de movimiento, la fracción modal para el primer modo es

$$\chi^{(1)} = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} = +1$$

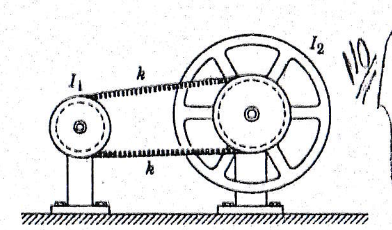
Sustituyendo el segundo valor característico $\omega_2^2 = 3k/m$, la fracción modal para el segundo modo es

$$\chi^{(2)} = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{2k - m\omega_2^2}{k} = -1$$

Físicamente esto significa que $x_2$ y $x_1$ están en fase y son iguales para el primer modo, cualquiera que sea su valor absoluto. En el segundo modo, son iguales, pero se encuentran fuera de fase.

Si se hubiera usado la segunda ecuación de movimiento para determinar la fracción modal, en lugar de la primera ecuación, los resultados habrían sido los mismos.

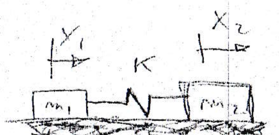
---



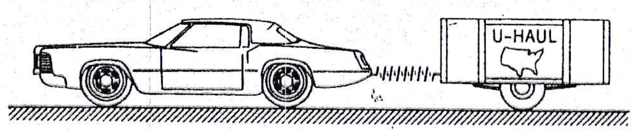

**PROBLEMA 8.3**
Un impulsor para carrete de proyector cinematográfico consiste de un resorte helicoidal apretadamente arrollado, montado con fuerte tensión entre dos poleas ranuradas. Las poleas tienen radios $r_1$ y $r_2$ y momentos de inercia centroidales $I_1$ e $I_2$, respectivamente. Derívese una expresión para la frecuencia o frecuencias naturales, en ciclos por segundo.

Respuesta: $\omega_1^2 = 0$; $\omega_2^2 = 2k\left[\frac{r_2^2 I_1 + r_1^2 I_2}{I_2 I_1}\right]$

**PROBLEMA 8.4**
Se muestran otra vez el automóvil y el remolque del Prob. 3.37. El remolque tiene una masa de 3 800 kg y es arrastrado por un automóvil de 1 750 kg. La flexibilidad del anganche es de 175 N/mm. ¿Cuáles son las frecuencias o la frecuencia de la oscilación libre del automóvil y del remolque?



Respuesta: Sólo una. 1.92 cps





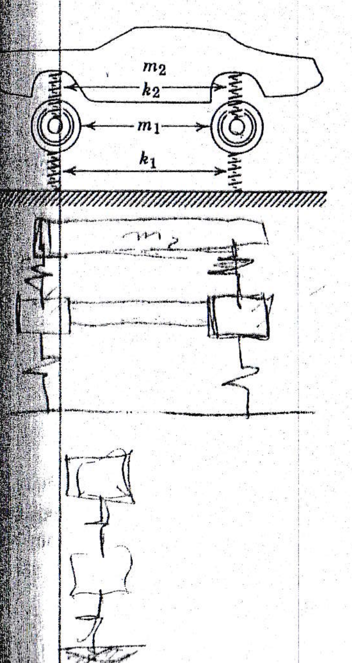

**PROBLEMA 8.5**
Determínense las frecuencias y formas de modo naturales del Prob. 3.42.

**PROBLEMA 8.6**
Determínense las frecuencias naturales del sistema de dos masas mostrado. Ambas masas se mueven sólo verticalmente; no se considere rotación de la masa inferior.

Respuesta: $\omega_1^2 = 1.439\ s^{-2}$;
$\omega_2^2 = 5.562\ s^{-2}$



**PROBLEMA 8.7**
Un fabricante de automóviles grandes analizó el problema de éstos separando las partes de uno de ellos. Pesando cada sección se encontraron los siguientes valores de pesos equivalentes.




| | | |
|---|---|---|
| $m_1$ | masa del eje | 180 kg |
| $m_2$ | masa del cuerpo | 670 kg |
| $k_2$ | resortes | 45.5 N/mm |
| $k_1$ | llantas | 538 N/mm |

No se consideren las frecuencias naturales tales como cabeceo, rotación y balanceo. Determínense las dos frecuencias naturales de movimiento.

Respuesta: 75.5 cpm, 544 cpm

**PROBLEMA 8.8**
Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales para el marco y péndulo del Prob. 3.41. El

péndulo oscila libremente en el mismo plano en el que se mueve el marco.

Respuesta: $\omega_1^2 = 0$; $\omega_2^2 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\left(\dfrac{g}{l}\right)$

**PROBLEMA 8.9**

Determínense las frecuencias y formas de modo naturales para las frecuencias del sistema del Prob. 3.43.

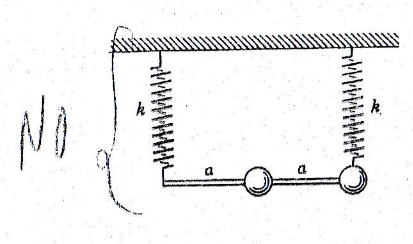
**PROBLEMA 8.10**

Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales del sistema mostrado. Piénsese acerca de coordenadas, cuerpo libres y ecuaciones de movimiento antes de resolver este problema. La barra es rígida y su peso despreciable.

Respuesta: $\omega_1^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{m}$; $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$

**PROBLEMA 8.11**

Ambas masas son idénticas. Las poleas concéntricas son libres de girar independientemente una de otra. ¿Cuáles son las frecuencias y formas de modo naturales? Despréciense la masa y la inercia de las poleas.

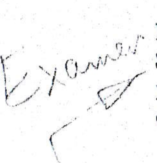


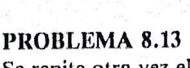

**PROBLEMA 8.12**

Dos resortes idénticos soportan una barra rígida y dos masas idénticas. Determínense las dos frecuencias naturales de movimiento para el sistema de dos masas.

Respuesta: $\omega_1^2 = (3 - \sqrt{5})\dfrac{k}{m}$;

$$\omega_2^2 = (3 + \sqrt{5})\frac{k}{m}$$

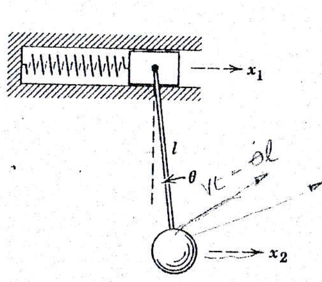




**PROBLEMA 8.13**

Se repite otra vez el Prob. 3.45. La masa del émbolo y la masa del péndulo valen 5 kg. El resorte tiene una constante de 400 N/m y el péndulo tiene una longitud de 0.25 m. Determínense las dos frecuencias naturales del sistema de dos masas. Supóngase que las oscilaciones son pequeñas.






Respuesta: $f_1 = 0.767$ Hz; $f_2 = 1.85$ Hz

**PROBLEMA 8.14**

Determínense las dos frecuencias naturales del Prob. 3.42. Supóngase que las oscilaciones son pequeñas; $k = 700$ N/m; $m = 10$ kg; $l = 0.125$ m.

Respuesta: $f_1 = 1.09$ Hz; $f_2 = 3.29$ Hz

**PROBLEMA 8.15**

Determínense las dos frecuencias naturales y formas de modo naturales para una barra delgada suspendida como péndulo (Prob. 3.40).

Respuesta: $\omega_1^2 = 0.916\dfrac{g}{l}$; $\omega_2^2 = 13.08\dfrac{g}{l}$

$x_1 = 1.18$, $x_2 = -0.85$

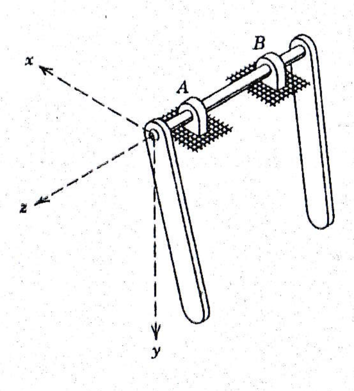
**PROBLEMA 8.16**

Determínense las dos frecuencias naturales y formas de modo naturales del Prob. Ej. 3.36. Supóngase que las oscilaciones serán pequeñas.

**PROBLEMA 3.17**

Una plataforma de masa $2m$, soporta una masa cilíndrica sólida $m$ que está elásticamente separada de la plataforma por medio de un resorte. Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales.

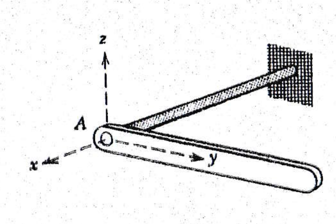
Respuesta: $\omega_1^2 = \dfrac{2}{7}\dfrac{k}{m}$; $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$




**PROBLEMA 8.18**

Se soportan dos barras esbeltas uniformes en cada extremo de una flecha que tiene módulo torsional de $K$. La flecha es libre de girar sin fricción en cojinetes en $A$ y $B$. Determínense las frecuencias de oscilación libre.

Respuesta: $\omega_1^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$; $\omega_2^2 = \frac{6K}{ml^2} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}$



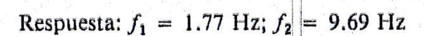

**PROBLEMA 8.19**

Determínense las frecuencias naturales del sistema. Puede considerarse que el resorte no tiene masa.

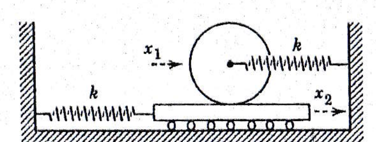
Respuesta: $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\frac{a^2}{l^2}$

**PROBLEMA 8.20**

Una barra esbelta, uniforme de 2 kg y 300 mm de largo, se fija en un extremo de una flecha circular. En el equilibrio, el extremo $A$ de la flecha se flexiona 12 mm en la dirección $z$, y se deforma torsionalmente 20° en el plano $y$-$z$, a partir de su posición libre. Determínense las dos frecuencias naturales del movimiento en el plano $y$-$z$.



Respuesta: $f_1$ = 1.77 Hz; $f_2$ = 9.69 Hz



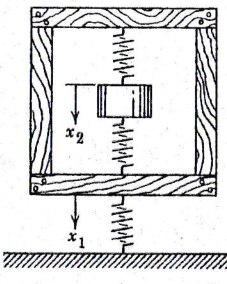

**PROBLEMA 8.21**

En todo momento, el cilindro gira sin deslizarse y las dos masas son iguales. La placa plana se mueve sin fricción sobre la superficie horizontal. Determínense las dos frecuencias y formas naturales del movimiento.

**PROBLEMA 8.22**

Determínense las frecuencias y formas de modo naturales del Prob. 3.51






**PROBLEMA 8.23**

El empacado por medio de resortes sometidos a tensión es una forma de soportar artículos extremadamente frágiles para sus transporte. Básicamente, el artículo frágil se soporta dentro del recipiente de transporte por medio de resortes en tensión. Para simplificar el problema, idealícese éste como el de un conjunto de dos masas y tres resortes, con $m$ = 2.5 kg, $k$ = 1 930 N/m. ¿Cuáles son las dos frecuencias y formas de modo naturales?

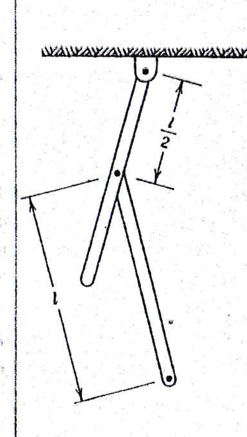
Respuesta: $\omega_1^2 = 0.439\frac{k}{m}$; $\omega_2^2 = 4.56\frac{k}{m}$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.281 \end{bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.781 \end{bmatrix}$$

**PROBLEMA 8.24**

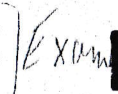
Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales para la esbelta barra larga soportada por dos resortes, cada uno de los cuales tiene una rigidez $k$. Un resorte está sujeto en el extremo de la barra, y el otro está sujeto en un punto a la tercera parte de la longitud a partir de un extremo.

Respuesta: $\omega_1^2 = \frac{4}{3}\frac{k}{m}$; $\omega_2^2 = 4\frac{k}{m}$




**PROBLEMA 8.25**

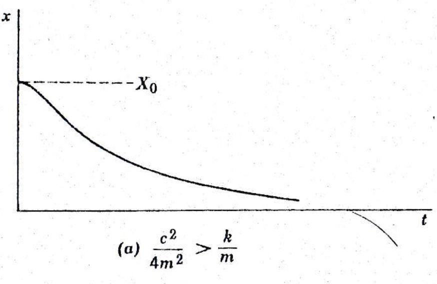
Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales para oscilaciones pequeñas, del sistema de dos masas compuesto por dos barras largas esbeltas, de igual longitud.



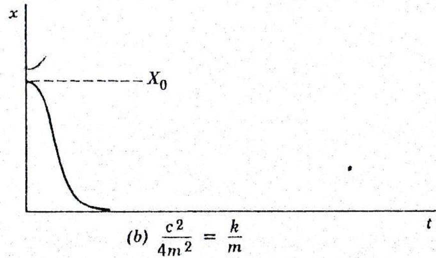
Respuesta: $x_1 = 1.59$; $\omega_1^2 = 1.019\frac{g}{l}$

$x_2 = -1.26$; $\omega_2^2 = 3.718\frac{g}{l}$

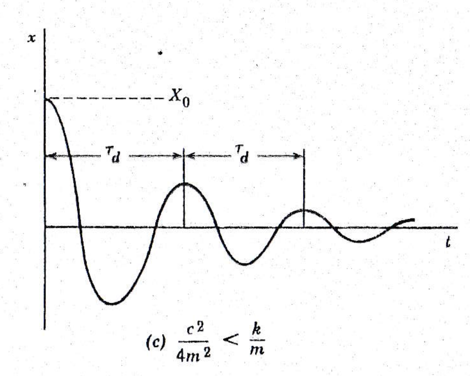
Fig. 6.2




(a) $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$




(b) $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$




(c) $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$

La relación entre la constante de amortiguación real y la constante crítica de amortiguación, es la *relación de amortiguación*, $\zeta$,

$$\frac{c}{c_{cr}} = \zeta \tag{6.6}$$

la que es un parámetro adimensional.

En el movimiento críticamente amortiguado, el sistema amortiguado retorna al equilibrio en un mínimo de tiempo y sin oscilar. Los instrumentos utilizados para medir valores de estado-estable, tales como el peso muerto de una balanza, se amortiguan por lo general críticamente. Matemáticamente, las dos raíces características, $r_1$ y $r_2$ de la ecuación de movimiento, son idénticas. En este caso, el desplazamiento sería



$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-(c/2m)t} \tag{6.7}$$

**Caso III.** $c^2/4m^2 < k/m$. Este es el caso del movimiento armónico amortiguado en el que ocurre oscilación alrededor de una posición de equilibrio, disminuyendo cada amplitud sucesiva con respecto a la amplitud anterior. Redisponiendo la Ec. 6.4, se puede expresar el desplazamiento como

$$x = e^{-(c/2m)t}[C_1 e^{i\sqrt{(k/m)-(c^2/4m^2)}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{(k/m)-(c^2/4m^2)}\,t}] \tag{6.7}$$

o en forma trigonométrica,

$$x = e^{-(c/2m)t}[A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t] \tag{6.8}$$

donde $\omega_d = \sqrt{(k/m)-(c^2/4m^2)}$ es la frecuencia en radianes por segundo de la armónica amortiguada, y $A$, $B$, $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias. Este movimiento se muestra en la Fig. 6.2c.

La frecuencia natural amortiguada y la frecuencia natural no amortiguada, se relacionan entre sí a través de la relación adimensional $\zeta$ de amortiguación, siendo siempre menor la frecuencia natural viscosa amortiguada, que la no amortiguada,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{6.9}$$

La Fig. 6.3 es una medida del grado en frecuencia natural con cantidades de amortiguación aumentadas. Esta es la Ec. 6.9, levemente transformada algebraicamente. Es obvio que la disminución de frecuencia será pequeña a menos que la amortiguación presente sea una fracción grande de la necesaria para amortiguar críticamente al sistema. En los sistemas de ingeniería mecánica, la amortiguación constituye por lo general una fracción muy pequeña de la amortiguación crítica. No es despreciable, pero la amortiguación del sis-

Fig. 6.3

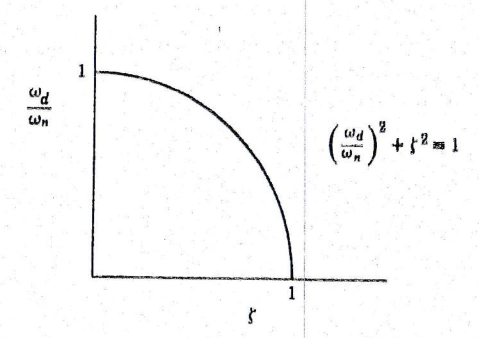


Tabla Valores Típicos de Amortiguación

| | $\zeta$ |
|---|---|
| Amortiguadores de automóvil | 0.1-0.5 |
| Hule | 0.04 |
| Estructuras de acero remachadas | 0.03 |
| Concreto | 0.02 |
| Madera | 0.003 |
| Acero laminado en frío | 0.0006 |
| Aluminio laminado en frío | 0.0002 |
| Bronce fosforado | 0.00007 |

tema por arriba de $\zeta = 0.2$ debe ser por diseño. La amortiguación natural de los materiales o estructuras reales de ingeniería es muy pequeña. En la Tabla 6.1 se muestran algunos valores típicos de amortiguación.

## 6.3 DECREMENTO LOGARITMICO

En un movimiento armónico viscosamente amortiguado, las amplitudes sucesivas tienen una relación logarítmica simple entre sí. Haciendo referencia a la Fig. 6.2c, la amplitud máxima en el tiempo $t = t_0$, es $X_0$. Un ciclo después, la amplitud ha disminuido a un valor $X_1$ en el que $t = t_0 + \tau_d$. Dos ciclos después, la amplitud ha disminuido a $X_2$, cuando $t = t_0 + 2\tau_d$. La constante $A$ es arbitraria. Su magnitud depende de la amplitud de movimiento $X_0$ en $t = t_0$. El periodo para movimiento amortiguado, que es el tiempo entre dos ciclos sucesivos es $2\pi/\omega_d$.

$$X_0 = Ae^{-(c/2m)t_0}$$

$$X_1 = Ae^{-(c/2m)(t_0+\tau_d)} = X_0e^{-(c/2m)\tau_d}$$

$$X_2 = Ae^{-(c/2m)(t_0+2\tau_d)} = X_0e^{-(c/2m)2\tau_d}$$

y después de $n$ ciclos.

$$X_n = X_0e^{-(c/2m)n\tau_d} \quad (6.10)$$

La cantidad $(c/2m)\tau_d = \delta$, es una medida de la amortiguación del sistema, llamada el *decremento logarítmico*,

$$X_n = X_0e^{-n\delta}$$

o

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n} \quad (6.11)$$



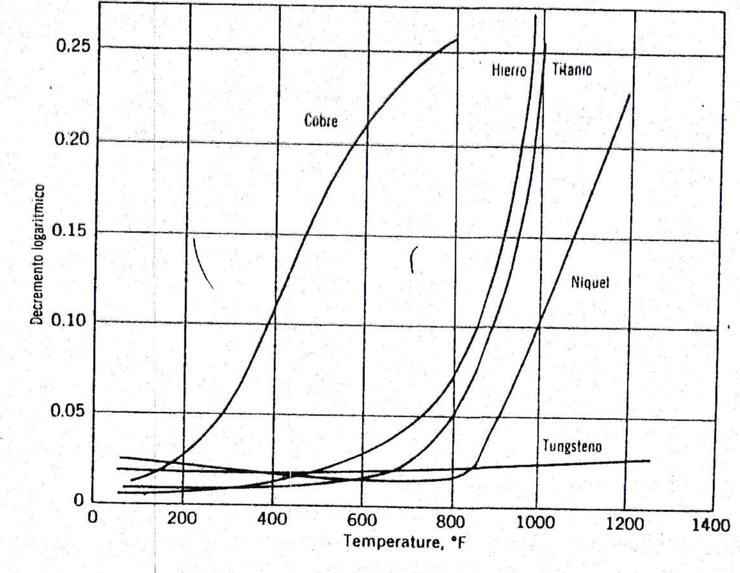
Esta es adimensional y en realidad es otra forma de la relación adimensional de amortiguación $\zeta$

$$\delta = \frac{c}{2m}\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6.12)$$

El decremento logarítmico y la relación de amortiguación son constantes del sistema, ya que no tienen valores arbitrarios sino que dependen de los claros, las condiciones superficiales, las temperaturas, el tamaño, la forma y otros factores. Como un ejemplo, $\delta = 4$ es un valor típico del decremento logarítmico de un sistema de amortiguador en un automóvil cuando éste es nuevo. Seis meses después, el decremento logarítmico habrá disminuido, para el automóvil usado, hasta $\delta = 2$.

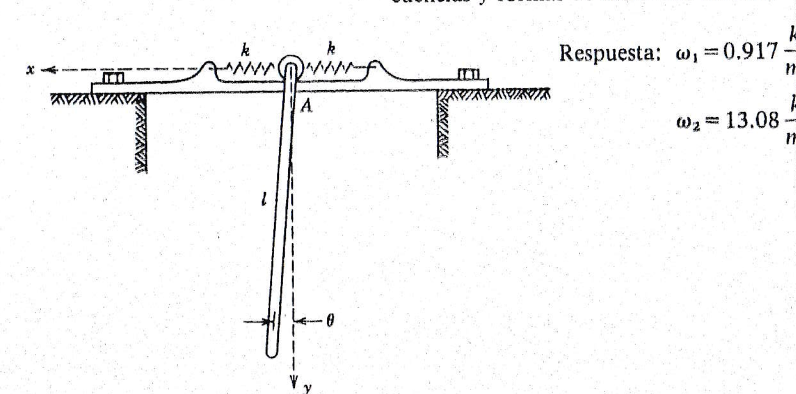
En la Fig. 6.4 se muestran los valores del decremento logarítmico para alambres delgados de varios materiales suspendidos en forma de péndulo torsional. Estos datos serían comparativos si todos los especímenes fueran del mismo tamaño, pero el número absoluto no es significativo. Como ejemplo, para los alambres probados, el de tungsteno tiene un decremento logarítmico más bajo a 500°F que el de cobre. Esta es una indicación de la amortiguación comparativa de los alambres. Es difícil extrapolar este conocimiento para partes en las que serán significantes las propiedades, los esfuerzos y el peso del material, ya que son importantes la geometría y el peso, pero el conocimiento comparativo es valioso para los ingenieros de proyecto.

Fig. 6.4



**PROBLEMA 8.26**

La barra delgada, rígida, está empernada en el punto $A$ a una rodillo que rueda sobre una superficie sin fricción. La barra tiene una masa $m$, y la masa del rodillo se puede despreciar. Determínense las dos frecuencias y formas de modo del sistema.




Respuesta: $\omega_1 = 0.917\frac{k}{m}$

$\omega_2 = 13.08\frac{k}{m}$

**PROBLEMA 8.27**

La barra esbelta está pivotada en su extremo superior, y oscila libremente de una barra y soporte de forma de $L$, que está fija en la base $B$. Para el propósito del problema, despreciénse las masas de la barra y del soporte. La barra y el soporte tienen una constante torsional elástica $K$, y la masa de la barra esbelta es $m$. Determínese la ecuación de frecuencia para las frecuencias naturales de vibración libre.

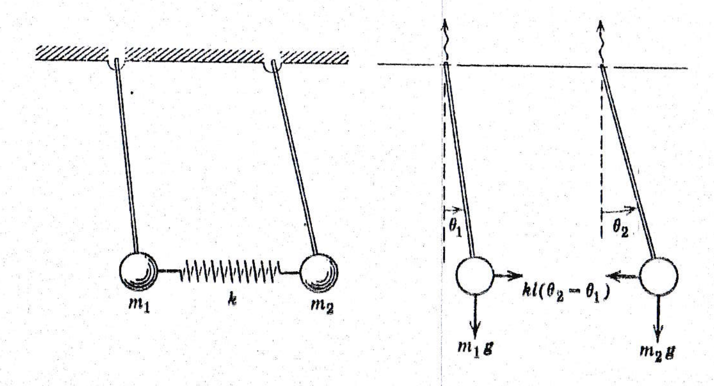
Respuesta: $\omega^4 - \omega^2\left[\frac{4k}{mb^2} + \frac{6g}{l}\right] + \frac{6gk}{mb^2} = 0$

## 8.3 COORDENADAS PRINCIPALES PARA DOS GRADOS DE LIBERTAD

Si en un modo principal se puede describir el movimiento de todas las partes del sistema sin hacer referencia a ninguna otra, esa coordenada es una *coordenada principal*. Es imposible definir el movimiento de $n$ grados de libertad con una coordenada única, pero sólo porque una coordenada principal es más un parámetro matemático que una coordenada geométrica cuya posición se mide directamente. En un sistema de tres grados de libertad es sencillo expresar el movimiento en términos de dos o tres coordenadas, por ejemplo



**Fig. 8.3**




las tres coordenadas ortogonales $x_1$, $y$, y $z$, pero es difícil aceptar físicamente una coordenada principal que exprese todo el movimiento para un sistema de tres masas, aun cuando esto se puede hacer con igual facilidad.

En la Fig. 8.3, se conectan dos péndulos simples por medio de un resorte lineal. Las barras de soporte no tienen masa. El sistema tiene dos grados de libertad, ya que cada péndulo se puede mover independientemente del otro. $\theta_1$ y $\theta_2$ son coordenadas generalizadas que describen físicamente la posición de cada masa y la distorsión del resorte. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum \mathbf{M} = I\ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} -k(\theta_2 - \theta_1)l^2 \cos\theta_2 - m_2 gl \operatorname{sen}\theta_2 &= m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 \\ +k(\theta_2 - \theta_1)l^2 \cos\theta_1 - m_1 gl \operatorname{sen}\theta_1 &= m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Para todos los ángulos de desplazamiento y para masas iguales, se pueden simplificar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} -kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 &= ml^2\ddot{\theta}_2 \\ +kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_1 &= ml^2\ddot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{8.11}$$

$\theta_1$ y $\theta_2$, son descripciones geométricas del movimiento, pero no son coordenadas principales. Los dos modos principales involucran ambos a $\theta_1$ y $\theta_2$, pero matemáticamente existen dos coordenadas principales, una correspondiente a cada modo principal. Sumando y restando estas ecuaciones, se obtienen dos ecuaciones de movimiento alternas,

$$\begin{aligned} ml^2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + mgl(\theta_2 + \theta_1) &= 0 \\ ml^2(\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + (mgl + 2kl^2)(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Ambas de estas ecuaciones, son de la muy familiar forma

$$\ddot{p} + \omega_n^2 p = 0$$

Cada ecuación es independiente de la otra, y podemos escribir por inspección

$$\omega_1{}^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_2{}^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

Estas son las dos frecuencias naturales o valores particulares del sistema, y las Ecs. 8.12 son las ecuaciones principales de movimiento. Deberá notarse que hemos encontrado los valores propios sin haber encontrado la ecuación de frecuencia. Este es un concepto muy importante que usaremos otra vez.

Sustituyendo $\omega_1{}^2$ y $\omega_2{}^2$ en las Ecs. 8.11, las fracciones modales son

$$\chi^{(1)} = \frac{\Theta_1^{(1)}}{\Theta_2^{(1)}} = +1$$

$$\chi^{(2)} = \frac{\Theta_1^{(2)}}{\Theta_2^{(2)}} = -1 \qquad (8.13)$$

Evidentemente, $(\theta_2 + \theta_1)$ y $(\theta_2 - \theta_1)$ tienen una relación directa con las coordenadas principales. Se usa el símbolo $p$ para una coordenada principal. Es sencillo escribir las ecuaciones principales de movimiento como éstas, si el sistema tiene simetría, es decir, los resortes son de módulos iguales y las masas son de magnitudes iguales. Resulta más complicado si se requieren factores de comparación por constantes de resorte o masa diferentes, pero puede hacerse.

En la vibración lineal, las coordenadas principales deben ser funciones armónicas del tiempo, lo mismo que las coordenadas geométricas. Las coordenadas principales tienen todas las mismas propiedades que las coordenadas geométricas $\theta_1$ y $\theta_2$. Como ejemplos, aceptemos que las dos coordenadas principales son $p_1(t)$ y $p_2(t)$

$$p_1(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$p_2(t) = C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \qquad (8.14)$$

La primera es la coordenada principal para el primer modo, correspondiente a la frecuencia natural $\omega_1$. La segunda es la coordenada principal correspondiente a la segunda frecuencia natural $\omega_2$. Cada una de ellas tiene dos constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales. Si los desplazamientos $\theta_1$ y $\theta_2$ implican ambos modos simultáneamente, entonces se pueden expresar $\theta_1$ y $\theta_2$ como funciones lineales de $p_1$ y $p_2$. Además, por superposición, estas funciones son aditivas.

$$\theta_1 = A_1 p_1 + B_1 p_2$$
$$\theta_2 = A_2 p_1 + B_2 p_2 \qquad (8.15)$$



Esta afirmación es más clara en forma matricial

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}$$

La relación lineal entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas principales, es la matriz

$$\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{bmatrix}$$

que es nada menos que la matriz modal en donde cada columna representa una forma de modo. La columna $\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\end{Bmatrix}$ es la matriz columna modal para el primer modo y $\begin{Bmatrix}B_1\\ B_2\end{Bmatrix}$ es la matriz columna modal para el segundo modo.

Para los dos péndulos y un resorte,

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\Theta_1^{(1)} & \Theta_1^{(2)}\\ \Theta_2^{(1)} & \Theta_2^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix} \qquad (8.16)$$

Estas ecuaciones se pueden transformar para establecer las coordenadas principales en términos de las coordenadas generalizadas

$$p_1 = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2}$$
$$p_2 = \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \qquad (8.17)$$

En este sencillo ejemplo, es fácil verificar que éstas son las coordenadas principales correspondientes a los modos principales, el más bajo cuando las masas se mueven conjuntamente, y el más alto cuando las masas se mueven en oposición. El factor numérico de 2 es algo que no podríamos deducir por suma o sustracción de ecuaciones de movimiento. Pronto será aparente en cualquier evaluación numérica de movimiento físico.

## 8.4 MODOS ACOPLADOS Y COORDENADAS ACOPLADAS

El término *acoplamiento* se usa en las vibraciones mecánicas, para indicar una conexión entre ecuaciones de movimiento. Este uso es variado; existen coordenadas acopladas, velocidades acopladas, acoplamiento dinámico, acoplamiento estático, modos acoplados y masas acopladas.

Si se usan coordenadas principales, en las frecuencias naturales, las ecuaciones de movimiento son completamente separadas. Cada modo principal corresponde a una frecuencia natural o valor propio de la ecuación de fre-

cuencia. Existe el mismo número de coordenadas principales que de ecuaciones de movimiento y modos principales, de manera que cada ecuación de movimiento está separada de otra. Sólo aparece una coordenada o cualquiera de sus derivadas con respecto al tiempo en cada ecuación de movimiento. Si una ecuación de movimiento contiene productos-cruz de coordenadas, o la energía potencial contiene productos-cruz de coordenadas, esa ecuación de movimiento está *estáticamente acoplada*. Si una ecuación de movimiento contiene productos-cruz de movimiento o si la energía cinética contiene productos-cruz de velocidad, esa ecuación de movimiento está *dinámicamente acoplada*. En el álgebra matricial, las ecuaciones de movimiento estáticamente acopladas, causarán términos fuera-diagonal en la matriz de rigidez. Similarmente, las ecuaciones de movimiento dinámicamente acopladas, causarán que aparezcan términos fuera-diagonal en la matriz de masa.

Debemos recordar que existe un conjunto de coordenadas principales para cada sistema en vibración lineal, pero que éste puede desafiar la interpretación geométrica. Queda a cargo de nuestra habilidad desacoplar cualquier conjunto de ecuaciones de movimiento usando coordendas principales. No obstante, con frecuencia es preferible usar un sistema acoplado con coordenadas que pueden viasualizarse, que un sistema desacoplado con coordenadas principales que no pueden visualizarse. Nuestra selección de coordenadas se hace para propia conveniencia y esta selección no tendrá efecto sobre los valores propios o las formas de modo.

En la Fig. 8.4a se representa un cuerpo rígido soportado sobre cuatro resortes lineales iguales, localizados en las cuatro esquinas de aquél, equidistantes del centro de gravedad, en $G$. El plano de soporte contiene al centro de gravedad. Este sistema tiene seis grados de libertad, pero los cuatro resortes no resisten la traslación en las direcciones $x$ o $y$, o en rotación alrededor del eje-$z$. En las direcciones $\phi z$-, y $\theta$, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + 4kz &= 0 \\ I_x\ddot{\phi} + 4kc^2\phi &= 0 \\ I_y\ddot{\theta} + 4kc^2\theta &= 0 \end{aligned} \tag{8.18}$$

**Fig. 8.4**

(a) (b)



Estableciendo en algebra matricial, no existen términos fuera-diagonal y

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 \\ 0 & 4kc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4kc^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} = 0 \tag{8.19}$$

Cada modo es independiente de los otros. Los valores característicos son

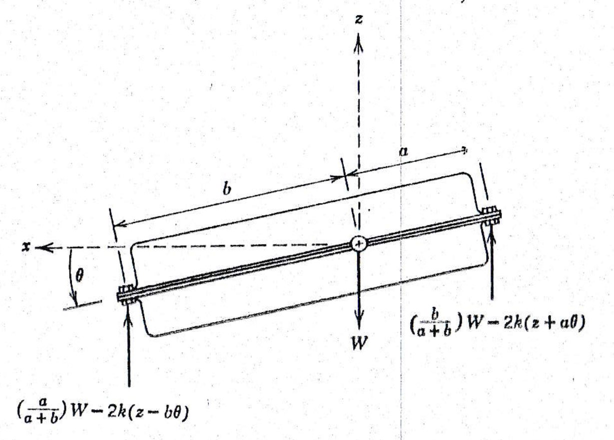
$$\omega_z^2 = \frac{4k}{m} \qquad \omega_\phi^2 = \frac{4kc^2}{I_x} \qquad \omega_\theta^2 = \frac{4kc^2}{I_y} \tag{8.20}$$

Si el centro de gravedad no está localizado en la parte media entre los soportes, estarán acoplados por lo menos dos modos. Como ejemplo, en la Fig. 8.4b, el centro de gravedad está localizado sobre el eje, pero más cercano al soporte del lado derecho. El movimiento alrededor del eje-$x$, no cambia. El desplazamiento angular $\phi$ es aún una coordenada principal y es independiente de las otras dos, pero la traslación en la dirección-$z$ y la rotación alrededor del eje-$y$, están acopladas. Tenemos la opción de analizar los modos acoplados utilizando las coordenadas generalizadas de $z$ y $\theta$, o de buscar las coordenadas principales que desacoplarían a aquellas. Como se explicó en la sección anterior, las dos coordenadas principales serán una transformación lineal de $\theta$ y $z$.

La Fig. 8.5 es una vista en planta considerando solamente dos coordenadas $z$ y $\theta$. Del diagrama de cuerpo libre, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} -2k(z-b\theta) - 2k(z+a\theta) &= m\ddot{z} \\ +2kb(z-b\theta) - 2ka(z+a\theta) &= I_y\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{8.21}$$

**Fig. 8.5**



En forma matricial, existen términos fuera-diagonal en la matriz de rigidez

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4k & -(2kb-2ka) \\ (2kb-2ka) & (2ka^2+2kb^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}=0 \qquad (8.22)$$

Estas ecuaciones están estáticamente acopladas. Para los modos normales en los que $z = Z$ sen $\omega t$ y $\theta = \Theta$ sen $\omega t$.

$$(4k-m\omega^2)Z-(2kb-2ka)\Theta=0$$
$$-(2kb-2ka)Z+(2ka^2+2kb^2-I_y\omega^2)\Theta=0$$

Haciendo el determinante igual a cero, se obtiene la ecuación de frecuencia,

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{4k}{m}+2\left(\frac{ka^2+kb^2}{I_y}\right)\right]+\left(\frac{2ka+2kb}{I_y m}\right)^2=0 \qquad (8.23)$$

En el término medio sea $ka^2 + kb^2 = k(a + b)^2 - 4\,kab$. Los valores particulares para los modos no acoplados son $\omega_z^2 = 4k/m$ y $\omega_\theta^2 = 4k(a + b)^2/I_y = 4kc^2/I_y$. Sustituyendo,

$$\omega^4-\omega^2\left[\omega_z^2+2\omega_\theta^2-\frac{4kab}{I_y}\right]+\omega_z^2\omega_\theta^2=0 \qquad (8.24)$$

Para mostrar el efecto de acoplar, supongamos que la frecuencia natural no acoplada es $\omega_\theta = 2\omega_z$. La Fig. 8.6 muestra entonces los valores propios de la ecuación de frecuencia en términos de $\omega_\theta$ y $\omega_z$ para diferentes localizaciones del centro de gravedad. Aún existen dos frecuencias naturales, $\omega_1$ y $\omega_2$ con $\omega_1 < \omega_z$ y $\omega_2 > \omega_\theta$.

**Fig. 8.6**

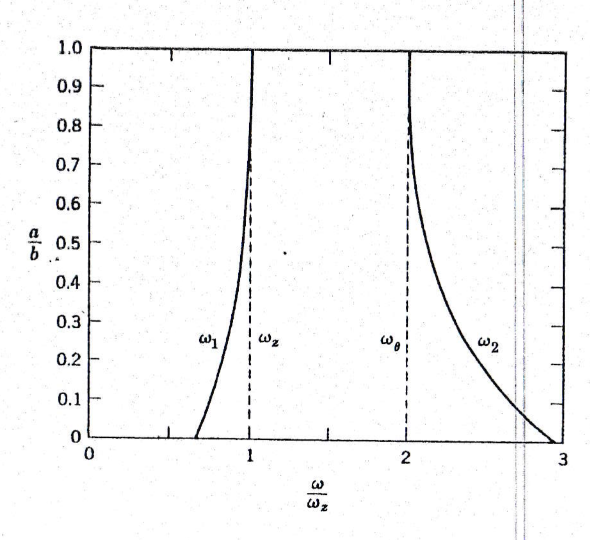
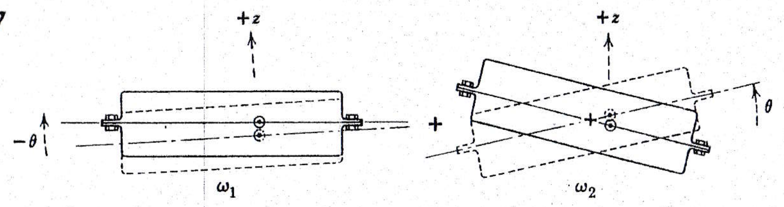





**Fig. 8.7**

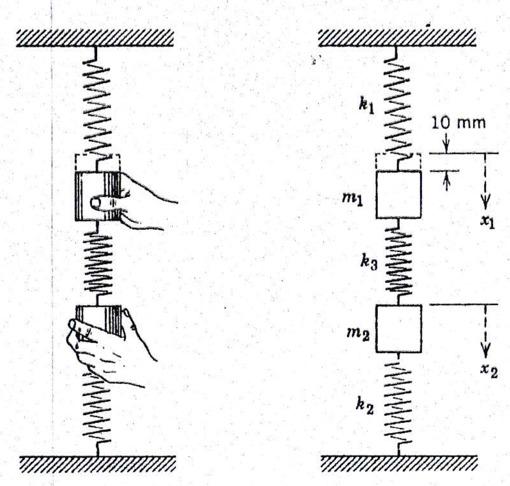



En la Fig. 8.7 se muestran las formas de modo para $\omega_1$ y $\omega_2$. Para $\omega_1$, domina la traslación como era de esperarse, pero existe una pequeña rotación. Para $\omega_2$ domina la rotación. Los signos de los desplazamientos (+ o —), de las fracciones modales, dependen de la convención de signos usada para las ecuaciones de movimiento.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 8.28*

Se repite el sistema de dos masas del Prob. Ej. 8.1. Esta vez se desplaza a la primera masa, $m_1$, 10 mm y se le libera en el tiempo $t = 0$. La segunda masa $m_2$, se libera también en el tiempo $t = 0$, pero no se le desplaza de la posición de equilibrio antes de ser liberada. Determínese el desplazamiento de cada masa como función del tiempo.




***Solución:***

Se ha determinado que los modos normales para este sistema son

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ presentarán ambos coordenadas principales $p_1(t)$ y $p_2(t)$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}[A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \text{sen } \omega_1 t] + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}[A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \text{ sen } \omega_2 t]$$

y las velocidades son

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}[B_1\omega_1 \cos \omega_1 t - A_1\omega_1 \text{ sen}\,\omega_1 t]$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}[B_2\omega_2 \cos \omega_2 t - A_2\omega_2 \text{ sen}\,\omega_2 t]$$

para las condiciones iniciales $\dot{x}_1(0) = 0$ y $\dot{x}_2(0)$ lo que significa que

$$0 = B_1\omega_1 + B_2\omega_2$$
$$0 = B_1\omega_1 - B_2\omega_2$$

Si la solución no es trivial, $B_1 = B_2 = 0$.
Para las condiciones iniciales $x_1(0) = 10$ mm y $x_2(0) = 0$,

$$10 = A_1 + A_2$$
$$0 = A_1 - A_2$$

Resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones,

$$A_1 = A_2 = 5 \text{ mm}$$

y,

$$x_1 = 5 \cos \omega_1 t + 5 \cos \omega_2 t$$

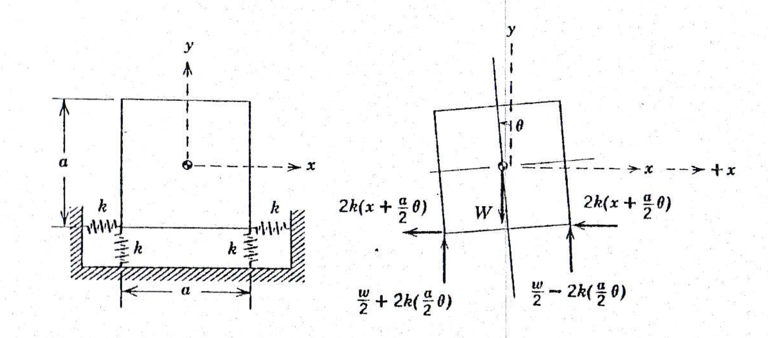
$$x_2 = 5 \cos \omega_1 t - 5 \cos \omega_2 t$$

Se observarán ambos modos principales en el movimiento de las coordenadas geométricas $x_1$ y $x_2$, como era de esperarse.

## *PROBLEMA EJEMPLO 8.29*

Un bloque rígido con una masa $m$, y un momento centroidal de inercia $I$, está soportado por ocho resortes iguales, cuatro verticales y cuatro horizontales. Determínense las frecuencias naturales acopladas y las fracciones modales para la traslación en la dirección-$x$ y la rotación en el plano $x$-$y$. La frecuencia natural en la dirección-$y$ es $\omega_y^2 = (4k/m)$ y no está acoplada, siempre que el centro de gravedad esté localizado en la parte intermedia entre los resortes verticales de soporte.






***Solución:***
En la dirección horizontal

$$\sum \mathbf{F}_x = m\ddot{\mathbf{x}}$$

$$-4k\left(x + \frac{a}{2}\theta\right) = m\ddot{x}$$

y en la dirección -$\theta$

$$\sum \mathbf{M}_G = \mathbf{I}_G\ddot{\theta}$$

$$-4k\left(x + \frac{a}{2}\theta\right)\frac{a}{2} - \left[\frac{W}{2} + 2k\left(\frac{a}{2}\theta\right)\right]\frac{a}{2} + \left[\frac{W}{2} - 2k\left(\frac{a}{2}\theta\right)\right]\frac{a}{2} = I\ddot{\theta}$$

Existen dos ecuaciones de movimiento para el movimiento descrito por las coordenadas $\theta$ y $x$. Estas son ecuaciones de movimiento acopladas, ya que $\theta$ y $x$ aparecen en cada ecuación. Para movimiento armónico, $x = X$ sen $\omega t$ y $\theta = \Theta$ sen $\omega t$. Sustituyendo

$$\begin{bmatrix} (-m\omega^2 + 4k) & +2ka \\ +2ka & (-I\omega^2 + 2ka^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = 0$$

Haciendo el determinante igual a cero, la ecuación de frecuencia es

$$(-m\omega^2 + 4k)(-I\omega^2 + 2ka^2) - 4k^2a^2 = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{4k}{m} + \frac{2k}{I}a^2\right) + \frac{4k^2a^2}{Im} = 0$$

Los valores característicos son

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m} + \frac{ka^2}{I} - \sqrt{\frac{4k^2}{m^2} + \frac{k^2a^2}{I^2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2k}{m} + \frac{ka^2}{I} + \sqrt{\frac{4k^2}{m^2} + \frac{k^2a^2}{I^2}}$$

Si el cuerpo rígido es homogéneo, $I = \frac{1}{6} ma^2$ y

$$\omega_1^2 = 1.67 \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \omega_2^2 = 14.33 \frac{k}{m}$$

Sustituyendo $\omega_1^2$ y $\omega_2^2$ en una de las ecuaciones de movimiento, las fracciones modales son

$$\chi^{(1)} = \frac{X^{(1)}}{a\Theta^{(1)}} = \frac{2k}{(m\omega_1^2 - 4k)} = -0.833$$

$$\chi^{(2)} = \frac{X^{(2)}}{a\Theta^{(2)}} = \frac{2k}{m\omega_2^2 - 4k} = 0.193$$

El primer modo consiste predominantemente en un movimiento de lado a lado, con muy poca rotación. El segundo modo consiste predominantemente de rotación.

---

**PROBLEMA 8.30**

(a) ¿Podría usted determinar por inspección los modos normales para el Prob. 8.18? ¿Qué son éstos?

(b) ¿Pódria usted determinar por inspección las coordenadas principales? ¿Qué son éstas?

**PROBLEMA 8.31**

(a) Determínense los modos principales para el Prob. 8.6

(b) Determínense las coordenadas principales.

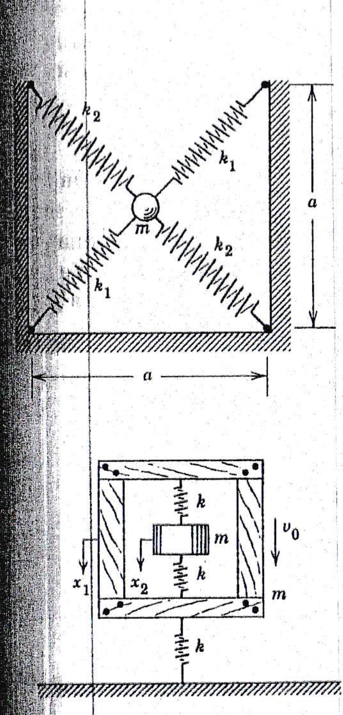
**PROBLEMA 8.32**

En el Prob. 8.8, la pesa del péndulo tiene una masa de 1 kg, y el marco tiene una masa de 5 kg. La longitud del péndulo es de 0.25 m. Determínense las amplitudes de vibración libre para la pesa y el bastidor, si el péndulo se desplaza 15° a partir de la vertical y se le libera desde el resposo.

Respuesta: $x_1 = 0.436\,(1 - \cos \omega_2 t)$;
$x_2 = 0.436\,(1 + 5 \cos \omega_2 t)$

**PROBLEMA 8.33**

Las barras uniformes del Prob. 8.18 se liberan cuando una coincide con la vertical ($\Theta_1 = 0$), y la otra está inclinada con un ángulo de 15° con respecto a la vertical ($\Theta_2 = \pi/12$). Determínese la ecuación de movimiento para $\theta_1$ y $\theta_2$.






Respuesta: $\theta_1 = \frac{\pi}{24} \cos \omega_1 t - \frac{\pi}{24} \cos \omega_2 t$;

$$\theta_2 = \frac{\pi}{24} \cos \omega_1 t + \frac{\pi}{24} \cos \omega_2 t$$

**PROBLEMA 8.34**

Todo el sistema de dos masas del Prob. Ej. 8.28 y el marco dentro del cual se ha soportado éste, reciben una velocidad inicial de 2 m/s, sin desplazamiento inicial. (Podría dejarse caer 200 mm). Determínense las ecuaciones de movimiento. ¿Por qué sólo se encuentra presente un modo? Para los propósitos del problema, $\omega_1 = 30\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_2 = 52\ \text{s}^{-1}$.

Respuesta: $X_1 = X_2 = \frac{1}{15}$ sen $30\tau$

**PROBLEMA 8.35**

La masa $m$ se mueve en el plano de la figura (al margen izquierdo). Descríbase el movimiento si la masa se desplaza una distancia de 25.4 mm hacia la derecha y se le libera. ($m = 2$ kg, $k_1 = 5$ N/mm, $k_2 = 2$ N/mm).

Respuesta: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 t$; $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t$

**PROBLEMA 8.36**

Determínense los modos normales para el Prob. 8.12; diagrámense éstos.

**PROBLEMA 8.37**

Se muestra otra vez el empaque de resorte sometido a tensión del Prob. 8.23. Determínese la deflexión de la masa interior, si se deja caer el empaque desde la altura de 800 mm de la parte superior de un escritorio y $k = 1\,930$ N/m, $m = 2.5$ kg.

$$\omega_1^2 = 0.439 \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = 4.56 \frac{k}{m}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.285 \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.760 \end{bmatrix}$$

Respuesta: 69.4 mm

**PROBLEMA 8.38**

Determínese los modos normales para el Prob. 8.20; diagrámense éstos.

**PROBLEMA 8.39**

Se ha determinado antes que las dos frecuencias y formas de modo naturales del Prob. 8.15 son

$$\omega_1^2 = 0.9173\frac{g}{l}; \qquad \theta_2^{(1)}/\theta_1^{(1)} = 1.178$$

$$\omega_2^2 = 13.0827\frac{g}{l}; \qquad \theta_2^{(1)}/\theta_1^{(2)} = -0.847$$

Ahora se desplaza la barra 15° a partir de la vertical y se libera desde el reposo.

$$\theta_1(0) = \frac{\pi}{12}, \qquad \theta_2(0) = \frac{\pi}{12}.$$

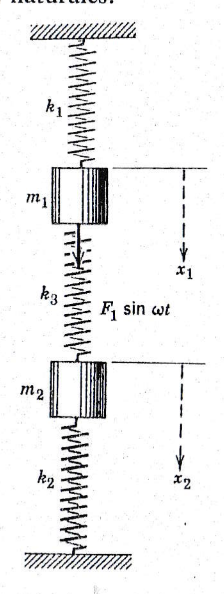
¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$,

Respuesta: $\theta_1 = 0.2388 \cos \omega_1 t + 0.0231 \cos \omega_2 t$
$\theta_2 = 0.2813 \cos \omega_1 t - 0.0196 \cos \omega_2 t$

## 8.5 VIBRACION FORZADA

**Cuando se fuerza un sistema de dos grados de libertad, por una función forzante armónica, el sistema presentará una respuesta en muchos aspectos similares a la respuesta de un sistema de grado único de libertad. La resonancia ocurrirá cuando la frecuencia forzante iguale a la frecuencia natural. Ya que existen dos frecuencias naturales, la resonancia ocurrirá dos veces, una para cada una de esas frecuencias naturales.**

***Fig. 8.8***






Consideremos, en la Fig. 8.8, que el sistema de la Fig. 8.1 ha sido forzado por una función forzante $F(t)$ aplicada a la primera de las dos masas $m_1$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} -k_1x_1 + k_3(x_2 - x_1) + F_1(t) &= m_1\ddot{x}_1 \\ -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) &= m_2\ddot{x}_2 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Si la función forzante es armónica, $F_1(t) = F_1$ sen $\omega t$, la respuesta será un desplazamiento armónico a la misma frecuencia que la frecuencia forzante.

$$x_1 = X_1 \text{ sen } \omega t$$
$$x_2 = X_2 \text{ sen } \omega t$$

Sustituyendo en la Ec. 8.25, y expresando estas dos ecuaciones simultáneas en forma matricial

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_3 - m_1\omega^2) & -k_3 \\ -k_3 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.26}$$

**El valor del determinante es la ecuación de frecuencia para el sistema, que resolvimos antes (véase la Ec. 8.4), para las frecuencias naturales. Haciendo referencia a las dos raíces $\omega_1$ y $\omega_2$**

$$\begin{aligned} \text{Det}(\omega^2) &= (k_1 + k_3 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_3^2 \\ &= m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \end{aligned} \tag{8.27}$$

Usando la regla de Cramer, podemos resolver para el desplazamiento máximo $X_1$ o $X_2$,

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_3 \\ 0 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}}{\text{Det}(\omega^2)}$$

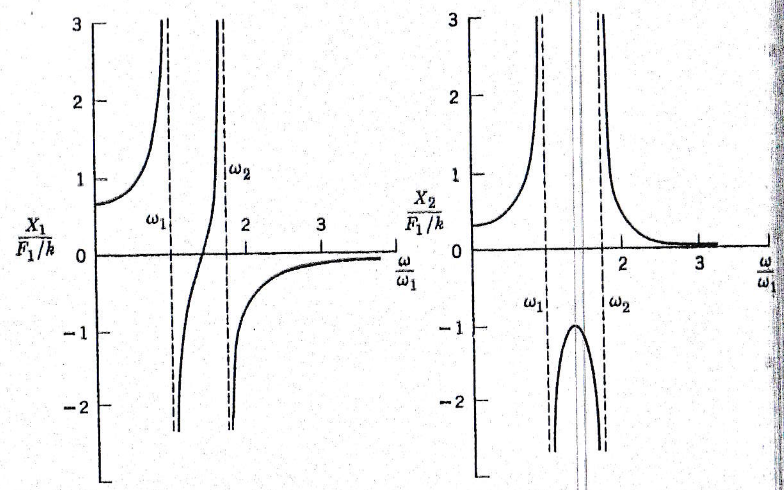
$$X_1 = \frac{F_1(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{8.28a}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_3 - m_1\omega^2) & F_1 \\ -k_3 & 0 \end{vmatrix}}{\text{Det}(\omega^2)}$$

$$X_2 = \frac{F_1k_3}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{8.28b}$$

Es obvio que las amplitudes $X_1$ y $X_2$ son infinitas si $\omega^2 = \omega_1^2$ u $\omega^2 = \omega_2^2$.

Fig. 8.9




La Fig. 8.9 muestra las respuestas para $X_1$ y $X_2$ en términos del parámetro adimensional $\omega/\omega_1$. Como en el Prob. Ej. 8.1, se usaron, para simetría, dos masas iguales y tres resortes iguales, de manera que

$$\omega_1{}^2 = \frac{k}{m} \quad \text{o} \quad \omega_2{}^2 = \frac{3k}{m}$$

En el parámetro adimensional $\omega/\omega_1$, se eligió arbitrariamente a $\omega_1$. Podría haberse elegido con la misma facilidad a $\omega_2$, pero las gráficas resultantes habrían sido más difíciles de leer.

Estas gráficas de la respuesta muestran las condiciones resonantes en $\omega_1$ y $\omega_2$. A otras frecuencias, la vibración es finita y podría haberse calculado si se hubiera conocido la magnitud de la fuerza armónica. Nótese que existe una frecuencia en la que la vibración de la primera masa, a la cual se aplica la función forzante, se reduce a cero. Esta es toda la base del *absorbente dinámico de vibración*.

## 8.6 ABSORBENTES DINAMICOS DE VIBRACION

El absorbente dinámico de vibración es un dispositivo mecánico que se usa para disminuir o eliminar la vibración mecánica indeseada. Su uso principal se encuentra en la maquinaria sincrónica, porque el absorbente dinámico de vibración se sintoniza a una frecuencia particular y sólo es efectivo dentro de una angosta banda de frecuencias.



Los absorbentes se usan extensamente en motores reciprocantes de combustión interna grandes, que trabajan a velocidad constante con el fin de hacer un consumo mínimo de combustible, y en herramientas recirprocantes tales como recortadoras, lanzaderas, lijadoras y compactadores. En todos estos usos la frecuencia de operación es casi constante y el sistema absorbente de vibración equilibra las fuerzas reciprocantes. Sin el absorbente de vibración, las fuerzas reciprocantes podrían hacer imposible sostener o controlar la herramienta. Los dispositivos de forma de campana doble opuesta que cuelgan de la mayor parte de los sistemas de líneas de transmisión de alto voltaje, son absorbentes dinámicos de vibración que se usan para mitigar los fatigantes efectos de la vibración inducida por el viento. Un corto paseo por el campo, verificará que existen miles de éstos en uso.

En su forma más sencilla, un absorbente dinámico de vibración, consiste de un resorte y una masa. Este sistema absorbente se sujeta al sistema de grado único de libertad, como se muestra en la Fig. 8.10. El efecto de añadir un absorbente dinámico de vibración, es obvio. Su presencia suma un grado más de libertad al sistema.

Las ecuaciones de movimiento para la masa principal y para la absorbente son

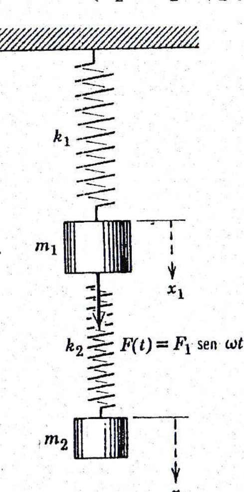
$$-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1 \operatorname{sen}\omega t = m_1\ddot{x}_1 \tag{8.29}$$

$$-k_2(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2 \tag{8.30}$$

Para esta excitación forzada, cada masa se moverá con la frecuencia de la función forzante $\omega$, $x_1 = X_1 \operatorname{sen} \omega t$, $x_2 = X_2 \operatorname{sen} \omega t$.

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.31}$$

Fig. 8.10



Las frecuencias naturales del sistema son valores propios o raíces características del determinante

$$\mathrm{Det}(\omega^2) = (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2 = 0 \tag{8.32}$$

y las amplitudes $X_1$ y $X_2$ son

$$X_1 = \frac{F_1(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \tag{8.33a}$$

$$X_2 = \frac{F_1 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \tag{8.33b}$$

Tanto $X_1$ como $X_2$ están determinados, si se conoce la magnitud de la función forzante $F(t) = F_1 \operatorname{sen} \omega t$. Para simplificación, se hacen las siguientes sustituciones:

$\omega_{11}^2 = \dfrac{k_1}{m_1}$, la frecuencia natural de sólo el sistema principal

$\omega_{22}^2 = \dfrac{k_2}{m_2}$, la frecuencia natural de sólo el sistema absorbente

$\mu = \dfrac{m_2}{m_1}$, la relación de masas

$\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}\mu$

Resolviendo para $X_1$ y $X_2$

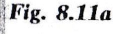
$$X_1 = \frac{F}{k_1}\,\frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right)}{\left(1 + \mu\dfrac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{11}^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu\dfrac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}} \tag{8.34a}$$

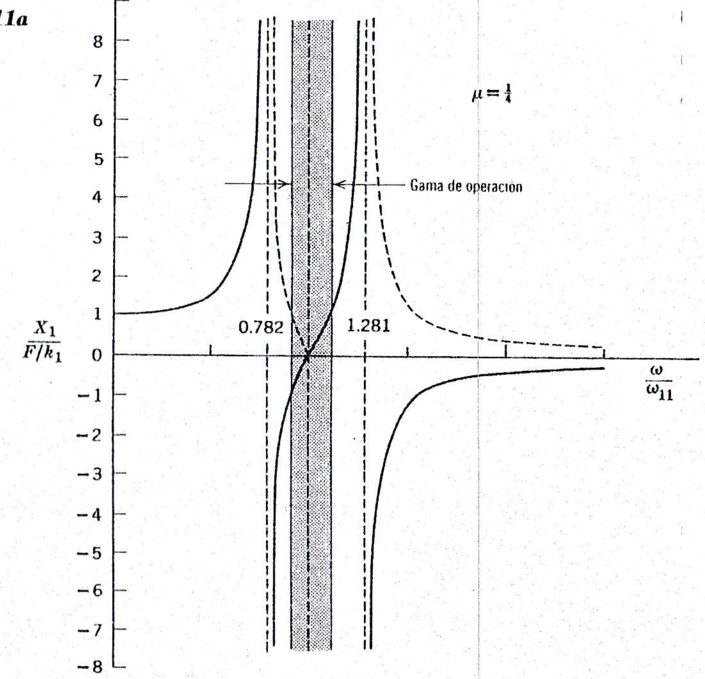
$$X_2 = \frac{F}{k_1}\,\frac{1}{\left(1 + \mu\dfrac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{11}^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu\dfrac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}} \tag{8.34b}$$

En $\omega = \omega_{22}$, el movimiento de la masa principal no sólo disminuye sino que también cesa. En las Figs. 8.11a y 8.11b, se muestran los desplazamientos $X_1$ y $X_2$ como funciones del parámetro arbitrario $F_1/k_1$. La relación de masas es $\mu = 1/4$ y $\omega_{11} = \omega_{22}$ cuando el absorbente está sintonizado con la frecuencia natural del sistema principal. Se ha sombreado la gama satisfactoria de operación en la que $X/(F/k_1) < 1$.

Se pueden variar dos parámetros. Uno es la relación de masas, $\mu$. Es obvio que una relación de masas grande presenta un problema práctico. Un sistema absorbente que se parezca al sistema original, no es una buena solución a




**Fig. 8.11a**




ningún problema de vibración. Al mismo tiempo, entre más pequeña sea la relación de masas, será más angosta la banda de operación del absorbente. El segundo parámetro es la relación de frecuencias $\beta = \omega_{22}/\omega_{11}$. La frecuencia natural del sistema absorbente $\omega_{22}$ es la frecuencia en la cual $X_1 = 0$. Esta deberá seleccionarse para que satisfaga de la mejor manera los requisitos de operación. No es necesariamente igual a $\omega_{11}$, aunque el uso de un absorbente de vibración está justificado cuando la frecuencia forzante es cercana a la frecuencia natural del sistema principal y las restricciones de operación hacen imposible verificar alguna de éstas.

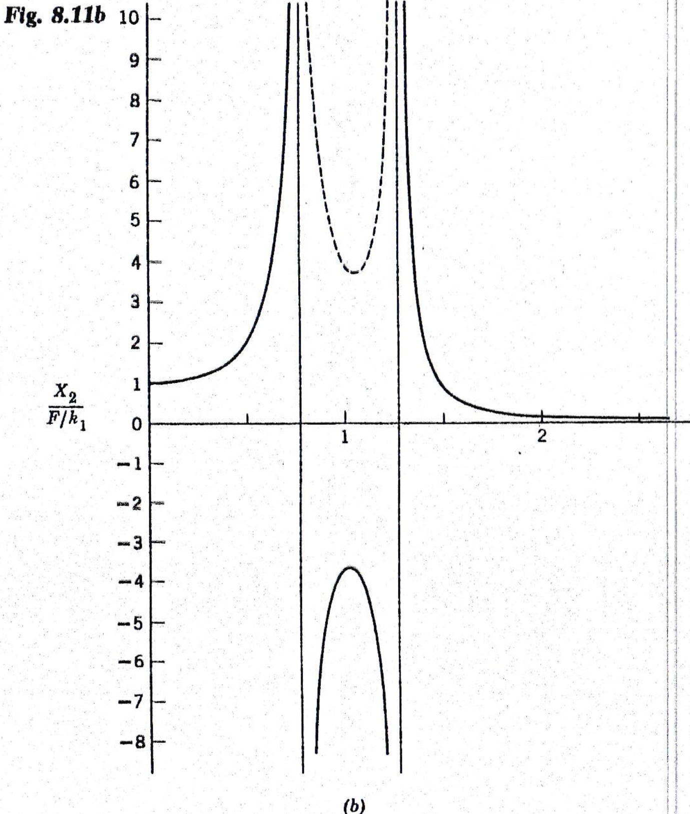
Se ha mencionado ya una desventaja del absorbente dinámico de vibración. Este agrega un grado de libertad más. Para encontrar las nuevas frecuencias del sistema principal y del absorbente, se puede retornar a la ecuación de frecuencia 8.31. Haciendo $\beta = \omega_{22}/\omega_{11}$, para $\mathrm{Det}(\omega^2) = 0$,

$$\left(1 + \mu\beta^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu\beta^2 = 0$$

$$\beta^2\left(\frac{\omega^4}{\omega_{22}^4}\right) - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}[1 + \beta^2(1 + \mu)] + 1 = 0 \tag{8.35}$$




**Fig. 8.11b**




*(b)*

Esta es la ecuación de frecuencia expresada en términos de los dos parámetros $\mu$ y $\beta$.

Para $\omega_{11} = \omega_{22}$, $\beta^2 = 1$,

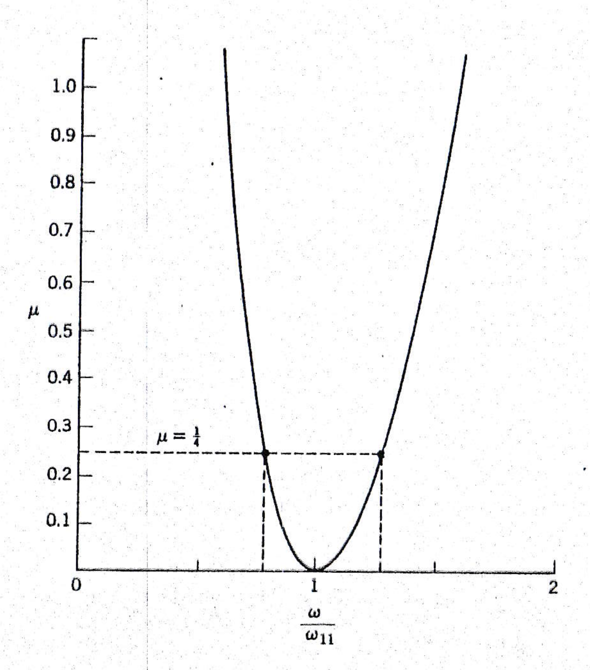
$$\frac{\omega^2}{\omega_{22}{}^2} = \frac{2+\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2+\mu)^2 - 4}$$

En la Fig. 8.12 es aparente la separación entre las dos frecuencias naturales $\omega_1$ y $\omega_2$. Para una relación de masas de $\mu$ = ¼, las dos frecuencias naturales $\omega_1$ y $\omega_2$ son $\omega_1 = 0.782\omega_{11}$ y $\omega_2 = 1.281\omega_{11}$. Al aumentar la relación de masas, aumenta la separación entre las dos frecuencias naturales.

Si se añade amortiguación al sistema absorbente, se disminuye la amplitud de $X_1$ y de $X_2$ en la resonancia, pero no en forma igual. Infortunadamente, la frecuencia natural más baja disminuye menos que la frecuencia natural más alta, y es la frecuencia natural más baja por la que se debe pasar para llegar a



**Fig. 8.12**




la velocidad de operación. Para igualar las amplitudes máximas en la resonancia, se sintoniza el absorbente amortiguado en una frecuencia levemente más baja que la frecuencia natural del sistema principal. Se define la sintonización óptima como la relación $\omega_{22}/\omega_{11}$ en la que las amplitudes resonantes son iguales. En los libros sobre vibración de S. Timoshenko y de J. P. Den Hartog, se puede encontrar una derivación de la sintonización óptima. Es suficiente aquí establecer el resultado de que en la sintonización óptima,

$$\beta = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} = \frac{1}{1+\mu} \tag{8.36}$$

También se puede optimizar la amortiguación. Si ésta no se encuentra presente, la amplitud del sistema principal será cero en la frecuencia de sintonización $\omega = \omega_{22}$. Con amortiguación, las amplitudes resonantes del sistema combinado disminuyen, pero la amplitud mínima del sistema principal deja de ser cero en la frecuencia de sintonización. La amortiguación óptima se define como la cantidad de amortiguación que hace que la curva de respuesta sea casi plana entre las dos frecuencias naturales $\omega_1$ y $\omega_2$. Las amplitudes resonantes se disminuyen y la amplitud de la frecuencia de sintonización se aumenta.

Si se usan absorbentes de vibración, se usan con más frecuencia sin amortiguación. La amortiguación destruye el propósito de un absorbente, que es eliminar la vibración indeseada y sólo se justifica si la banda de frecuencia en la cual es efectivo el absorbente es demasiado angosta para la operación.

## 8.7 TRANSMISION DE FUERZA Y MOVIMIENTO

Para un sistema con dos o más grados de libertad, la transmisión de fuerza es más compleja que en el caso de uno con grado único de libertad. La relación modal entre las coordenadas tiene mucho que ver en la fuerza transmitida.

Haciendo referencia a la Fig. 8.8, se puede transmitir fuerza a través de cualquiera de los resortes $k_1$ o $k_2$, pero solamente si éstos se hallan bajo tensión o compresión. Usando la convención de signos en la Fig. 8.8, se puede transmitir una fuerza positiva si se estira el resorte $k_1$, o si se comprime el resorte $k_2$. Estas fuerzas se suman. Así

$$|F_{TR}| = k_1x_1 + k_2x_2 = k(x_1 + x_2) \tag{8.37}$$

Si la fuerza impuesta $F(t) = F_1$ sen $\omega t$ se aplica a la masa $m_1$, la relación de transmisión es

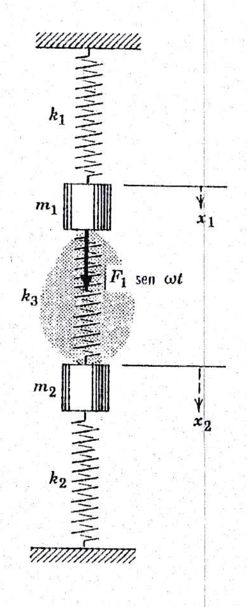
$$TR = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}} \tag{8.38}$$

$\omega_1^2$ es el cuadrado de la primera frecuencia natural. Esto era de esperarse ya que $x_1 + x_2$ constituye una medida directa de la coordenada principal $p_1$. En el segundo modo, $kx_1$ cancela a $kx_2$. Este resultado particular se debe a la simetría del ejemplo, $\chi^{(1)} = 1$, $\chi^{(2)} = -1$. Aunque parece que la relación de transmisión para un grado único de libertad no llega a esta falsa conclusión. En este caso, si hubiéramos agrupado ambas masas, la frecuencia natural del sistema de grado único de libertad sería $\omega_n^2 = k/2m$, en tanto que aquí $\omega_1^2 = k/m$ y $\omega_2^2 = 3k/m$.

Al mismo tiempo, el desplazamiento relativo entre $x_1$ y $x_2$ puede ser más importante que la fuerza transmitida a la cimentación. Quizá debería considerarse como ejemplo la deflexión del elemento de acoplamiento como una falla de ingeniería. Visualícese el elemento central de acoplamiento como si fuera un huevo. En el primer modo, el elemento de acoplamiento no se deforma. En el segundo modo, la deflexión llega a un máximo. En este caso,

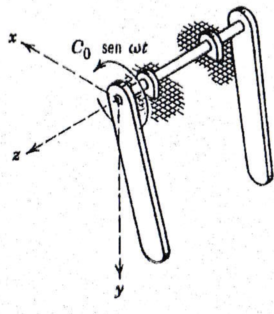
$$X_2 - X_1 = \frac{F_1/k}{3\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} \tag{8.39}$$






Si el elemento de acoplamiento fuera un huevo, el segundo modo sería catastrófico, a pesar del hecho de que no se transmitiría absolutamente ninguna fuerza o movimiento hacia la cimentación. Es obvio que el parámetro más significativo es aquel en el cual estamos más interesados. Este podría ser el daño estructural o la vibración indeseada.

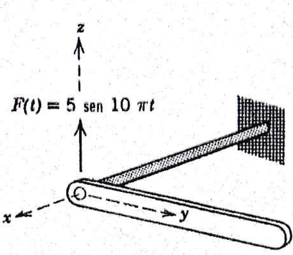
Es aparente la importancia de los modos acoplados. Supóngase el sistema excitado por fuerza senoidal de la Fig. 8.4a. Si la excitación fuera puramente vertical, y el centro geométrico de soporte coincidiera con el centro de gravedad, el segundo modo sería forzado. Si la excitación fuera una pareja pura en la dirección-$\theta$, el primer modo no sería forzado. Asimismo, si el centro de gravedad no estuviera localizado simétricamente, los modos primero y segundo no serían independientes. Es ventajoso localizar simétricamente el centro de gravedad y hacer independientes a los modos. En la práctica se toman grandes precauciones para asegurar que el centro de gravedad esté soportado simétricamente y que el plano de soporte pase a través de este centro de gravedad. Este es uno de aquellos principios de aislamiento de vibración que son tan fáciles de aplicar, que se considera mala práctica de ingeniería el ignorarlos, aun si esto es innecesario. El excitar un modo indeseado, lo que podría haberse evitado localizando el centro de gravedad simétricamente, es algo que se aprende a no hacer dos veces.




**PROBLEMA 8.40**

Se aplica una pareja oscilante, $C = C_0$ sen $\omega t$ a uno de los dos péndulos del Prob. 8.18. Determínese la amplitud de movimiento de ambos péndulos si la frecuencias forzante es de 200 ciclos/minuto, y la pareja $C_0$ es de 2 N·m. Otras constantes físicas son: $m$ = 1 kg, $K$ = 9 N·m/radián, $l$ = 300 mm.

Respuesta: $\theta_1$ = 0.0418 radianes;
$\theta_2$ = 0.0076 radianes




**PROBLEMA 8.41**

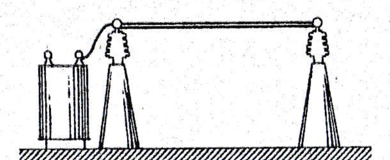
Determínense las amplitudes de movimiento forzadas para la flecha en voladizo del Prob. 8.20, si se aplica una fuerza de 5 N a lo largo del eje-$z$ con una frecuencia de 5 Hz.

Respuesta: $\Theta$ = 1.205°;
Z = 3.6 mm



**PROBLEMA 8.42**

En el Prob. 8.10, $m$ = 2 kg y $k$ = 1 500 N/m. Determínese la amplitud de movimiento si se aplica una fuerza vertical $F(t)$ = 10 sen $10t$ a la masa derecha.



**PROBLEMA 8.43**

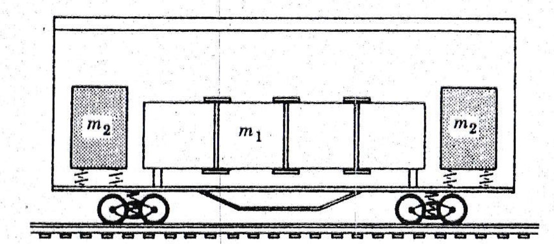
En las subestaciones de distribución de energía eléctrica de alto voltaje, se usan tubos como barras colectoras para transportar la corriente eléctrica. Por tener claros largos entre soportes, los tubos quedan sometidos con frecuencia a vibraciones inducidas por el viento. En un caso, se observó que un colector de aluminio de 25 m, con una masa de 3.75 kg/m, tenía una frecuencia fundamental de 5.0 Hz. Determínense la masa y la constante de resorte de un absorbente dinámico de vibración, colocado a la mitad del claro, si la barra colectora y el sistema absorbente deben no tener frecuencias naturales dentro de la gama de 3.6 a 7.0 Hz.

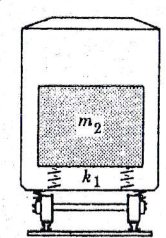
**PROBLEMA 8.44**

Un furgón de ferrocarril que ha sido modificado para transportar carga frágil, consiste de un cuerpo principal de carro, $m_1$, soportado cerca de cada extremo por los resortes principales $k_1$. En cada extremo del furgón se montan masas idénticas $m_2$ de absorbente dinámico de vibración. El furgón tiene una masa de 25 000 kg en vacío y sin absorbentes y de 125 000 kg cargado por completo. Para una deflexión total de normas AAR, de 41.3 mm, la velocidad a la cual debe ocurrir el movimiento vertical mínimo de la masa $m_1$, es de 100 km/h, sobre rieles normalizados de 11.89 m. Si cada una de las masas absorbentes es de 12 500 kg, determínense las dos velocidades en las cuales ocurrirá la resonancia.



Respuesta: 85 km/h; 138 km/h



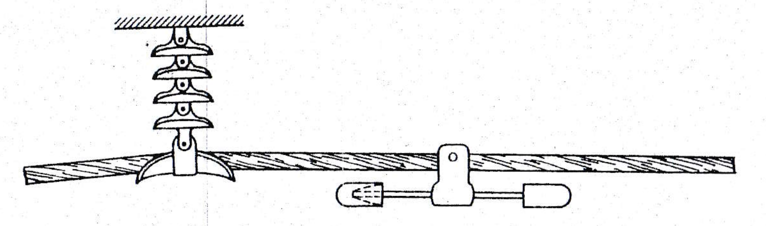

**PROBLEMA 8.45**

Para un uso particular de un absorbente dinámico de vibración, $\omega_1^2 = \omega_2^1$ y $\mu$ = ¼. ¿Cuál es la gama central de frecuencia para la cual la relación de transmisión es menor que la unidad?

Respuesta: $0.906\ \omega_{11} < \omega < 1.12\ \omega_{11}$

**PROBLEMA 8.46**

Un cable de transmisión con masa de 1.5 kg/m, está suspendido en un claro largo. Se sujetan absorbentes de vibración al cable, cerca de la torre de suspensión, para suprimir la vibración inducida por el viento, que se caracteriza por la oscilación vertical del cable en una serie de gazas estacionarias. Cada absorbente consiste de dos pesas de 5 kg sujetas a un tramo corto de cable flexible. La frecuencia natural del puro ab-



sorbente es de 15 Hz. Debido a la gran longitud del claro, el cable está siempre excitado a, o cerca de cierta frecuencia natural, que se puede aproximar por $f_n = 75/L$, en donde $L$ es la longitud de una gaza en metros. Determínese la gama de frecuencias para la cual es efectivo un absorbente. Nótese que la masa de una gaza de cable disminuye al decrecer la longitud de la misma. ¿Qué ocurre si se usan dos absorbentes?

Respuesta: 10.8 Kz$<f<$20.8 Hz

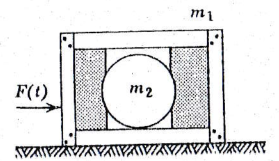
**PROBLEMA 8.47**

Una instalación industrial de agitadores del procesamiento, muestra una violenta resonancia a 456 ciclos /min. Como corrección de prueba, se sujetan dos absorbentes de vibración de 5 kg al sistema de procesamiento, lo que produce dos frecuencias resonantes de 404 y a 515 ciclos/min. ¿Cuántos absorbentes de vibración se requieren para asegurar que no ocurrirá resonancia entre 350 y 600 ciclos/min?

Respuesta: 10 absorbentes

**PROBLEMA 8.48**

Una caja con masa de 5 kg contiene una bola de boliche (esfera) con masa de 7 kg. Esta tiene un diámetro de 200 mm. El empaque soporta la bola en sus partes superior e inferior, pero infortunadamente la caja se encuentra sobre un lado. Considérese que el empaque es elástico con un módulo de 1 200 N/m y que no se puede ignorar la bola, pero por motivos de simplicidad supóngase que la caja descansa sobre una superficie lisa y que la fricción entre caja y la superficie horizontal sí se puede despreciar.




(a) ¿Cuál es la frecuencia natural o las frecuencias naturales de la caja y la bola?
(b) Determínese el movimiento absoluto, tanto de la bola como de la caja si $F(t)$ = sen $20t$.

Respuesta: $f$ = 3.91 Hz
$X_1$ = 28 sen $2\omega t$, mm
$x_2$ = —2.4 sen $2\omega t$, mm

# NUEVE

# VIBRACION TORSIONAL

## 9.1 SISTEMAS DISCRETOS

La mayor parte de los sistemas reales tiene muchos grados de libertad. Se pueden hacer simplificaciones para aproximar una sistema bastante complejo a uno con sólo uno o dos grados de libertad, y se puede lograr mucho utilizando un sistema simplificado, pero es importante saber las características de los sistemas de más de dos grados de libertad, y las diferencias en sus características de vibración. Algunas son demasiado sutiles, puede haber más de dos frecuencias naturales, una correspondiente a cada grado de libertad. Cada frecuencia natural puede también caracterizarse por un modo principal que es descriptivo de la misma.

Estos sistemas pueden tratarse de cualquiera de dos maneras. En una, se separan las propiedades elásticas y de inercia del sistema en masas y resortes discretos. Se modela la dependencia espacial de la masa y elasticidad distribuidos. Este método se conoce como el de uso de masas agrupadas y resortes agrupados o más esotéricamente como de parámetros agrupados, o simplemente como de sistemas discretos. Se supone que todas las propiedades elásticas se presentan en resortes sin masa, y que todas las propiedades inerciales se presentan en masas puntuales. No es necesario decir que con el advenimiento y amplia utilización de la computadora moderna, el hacer discreto un sistema usando métodos numéricos para obtener soluciones, ha llegado a ser el método más aceptado para resolver problemas de vibración mecánica. *El proceso de hacer discreto un sistema es también la fuente de los errores más grandes.* Debe tenerse en mente este hecho cuando se evalúan los resultados de la solución de un problema hecho discreto con ayuda de la computadora.

En el segundo método de ataque, se distribuyen espacialmente las propiedades elásticas e inerciales como un sistema continuo, o como un sistema distribuido. Este método es más exacto, pero los análisis quedan limitados a una escasa selección de problemas, tales como los de vigas uniformes o barras esbeltas. Cualquiera que sea el método seleccionado para el modelado, discreto o distribuido, *el resultado práctico es sólo tan bueno como el modelo.* Esto es importante, pues podemos emplear horas en manipular un problema matemático sin comprender que los errores inherentes en el modelo matemático no lo justifican.

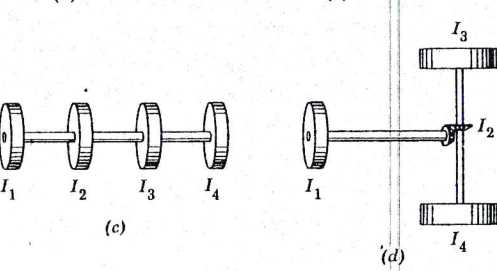
## 9.2 VIBRACION TORSIONAL

Los primeros problemas hechos discretos que se trataron como grupo, surgieron como resultado de la vibración torsional en los cigüeñales de grandes máquinas de vapor reciprocantes, flechas de transmisión y durante y después de la Primera Guerra Mundial, en los motogeneradores de los sistemas de propulsión marinos y submarinos. Se ha acumulado una cantidad considerable de literatura acerca de la solución de estos problemas, y puede disponerse de ella con facilidad. Es de interés para el estudio de la vibración mecánica, ya que la transición desde los problemas clásicos, que son fáciles de visualizar, a los actuales problemas que no lo son, es lógica y directa.

Como ejemplos, consideremos cuatro sistemas torsionales. El sistema de dos masas de la Fig. 9.1a tiene dos grados de libertad, pero una de sus frecuencias naturales vale cero, $\omega_1^2 = 0$. Más correctamente, éste es un sistema de dos grados de libertad, degenerado. Las ecuaciones de movimiento se escriben con facilidad, gracias a nuestro conocimiento de dos grados de libertad

$$I_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

**Fig. 9.1**






La ecuación de frecuencia se encuentra suponiendo vibración armónica en un modo principal con una frecuencia $\omega$ y eliminando las amplitudes $\theta_1$ y $\theta_2$.

$$\theta_1 = \Theta_1 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\theta_2 = \Theta_2 \operatorname{sen}\omega t$$

La relación de frecuencia es

$$\omega^4 I_1 I_2 - \omega^2(I_1 + I_2)k = 0 \qquad (9.1)$$

a partir de la cual los valores característicos son las frecuencias naturales.

$$\omega_1^2 = 0$$
$$\omega_2^2 = K\left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}\right)$$

Los modos correspondientes a estas frecuencias naturales se describen sustituyendo $\omega_1^2$ y $\omega_2^2$ en la ecuación de movimiento. Este es el mismo problema físico del Prob. Ej. 2.21.

El sistema de tres masas de la Fig. 9.1b, es un sistema de tres grados de libertad, degenerado. Considerando éste en mayor detalle, y usando tres coordenadas generalizadas $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ para los desplazamientos angulares de cada masa, las ecuaciones de movimiento son

$$I_1\ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 + K_2(\theta_2 - \theta_3) - K_1(\theta_1 - \theta_2) = 0 \qquad (9.2)$$
$$I_3\ddot{\theta}_3 - K_2(\theta_2 - \theta_3) = 0$$

Para vibración armónica en un modo principal,

$$\theta_1 = \Theta_1 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\theta_2 = \Theta_2 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\theta_3 = \Theta_3 \operatorname{sen}\omega t$$

sustituyendo

$$(K_1 - I_1\omega^2)\Theta_1 - K_1\Theta_2 = 0$$
$$(K_1 + K_2 - I_2\omega^2)\Theta_2 - K_1\Theta_1 - K_2\Theta_3 = 0 \qquad (9.3)$$
$$(K_2 - I_3\omega^2)\Theta_3 - K_2\Theta_2 = 0$$

Como para dos grados de libertad, la ecuación de frecuencia para el sistema de tres grados de libertad se puede encontrar eliminando $\Theta_1$, $\Theta_2$, y $\Theta_3$

$$\omega^6(I_1 I_2 I_3) - \omega^4[K_1(I_2 I_3 + I_1 I_3) + K_2(I_1 I_2 + I_1 I_3)] + \omega^2 K_1 K_2(I_1 + I_2 + I_3) = 0 \qquad (9.4)$$

Esta tiene también tres valores característicos, uno de los cuales es $\omega_1^2 = 0$.

Sustituyendo los valores característicos de $\omega^2$ en las ecuaciones de movimiento, se obtendrán las relaciones modales entre $\Theta_1$, $\Theta_2$ y $\Theta_3$. Estas relaciones implicarán razones. Como un ejemplo, la primera ecuación de movimiento implicará a $\Theta_1$ y a $\Theta_2$, y la tercera implicará a $\Theta_2$ y $\Theta_3$. La ecuación no usada es redundante, ya que es imposible resolver explícitamente para $\Theta_1$, $\Theta_2$ y $\Theta_3$. El sistema se denomina *vector característico, vector modal,* o *vector propio*. Para cada frecuencia natural, $\omega^2$, el vector modal tendrá una forma única, pero una amplitud arbitraria. Esto concuerda con nuestro conocimiento del principio de Rayleigh el cual afirma que, a una frecuencia natural, las amplitudes son independientes de la frecuencia.

Para ayudar en el cálculo de vectores modales, es convencional normalizar estas relaciones usando $\Theta_1 = 1$ radián y expresar todas las otras amplitudes con respecto a $\Theta_1$,

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{K_1 - I_1\omega^2}{K_1}$$

$$\frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{K_2(K_1 - I_1\omega^2)}{K_1(K_2 - I_3\omega^2)} \tag{9.5}$$

El sistema de cuatro masas de la Fig. 9.1c, tiene cuatro frecuencias naturales, otra vez con $\omega_1^2 = 0$, pero éste no es el único sistema torsional de cuatro masas posibles. El tren de impulso de un automóvil convencional, si se incluyen solamente las ruedas posteriores, el diferencial y el motor (Fig. 9.1b), es un sistema torsional de cuatro masas. Su disposición es por completo diferente de la disposición en línea, debido a la transmisión engranada en $I_2$ y tiene una diferente ecuación de frecuencia. Esta disposición se denomina un sistema ramificado debido a la ramificación del sistema elástico en una de las masas.

Para más de cuatro masas, las ecuaciones de frecuencia llegan a ser más complicadas. Son posibles disposiciones resorte-masa ramificadas adicionales, haciendo cada grado de libertad adicional aún más prohibitiva la labor. Para un sistema torsional de cinco masas, existen tres posibles disposiciones. Para un sistema torsional de seis masas, existen cuatro. El trabajo de determinar únicamente los valores característicos de la ecuación de frecuencia se hace difícil hasta lo imposible. Lo que se necesita es un esquema para determinar los valores característicos y las formas de modo, sin determinar las ecuaciones de frecuencia. Esto es particularmente cierto, ya que pueden ser importantes tan sólo uno o dos modos, y no tiene sentido determinar explícitamente todos los modos, si sólo se necesitan uno o dos para resolver un problema particular.



## 9.3 METODO DE HOLZER

El método que se atribuye a Holzer se desarrolló en realidad a través del trabajo de muchos de los primeros investigadores de los problemas de vibración torsional. Este método consiste básicamente en un proceso de suposiciones y comprobaciones para encontrar las frecuencias naturales, pero es un método lógico.

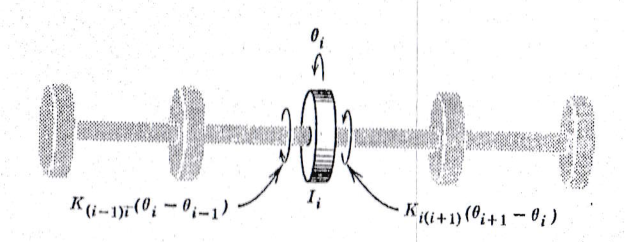
A una frecuencia natural, se pueden mantener las amplitudes resonantes sin aplicación de una fuerza externa. Este es uno de los significados físicos de la frecuencia natural. También, las amplitudes reales son arbitrarias. Pero, si se asigna un valor definido a un desplazamiento $\Theta_1$, se determinan singularmente todos los otros desplazamientos. La esencia del método de Holzer es usar cierto valor conveniente, por ejemplo $\Theta_1 = 1$ radián, en forma arbitraria, y relacionar todas las otras amplitudes con ese valor. Entonces, sólo se hace necesario encontrar las frecuencias para las cuales la suma de la fuerzas o parejas inerciales vale cero. Estas frecuencias tienen que ser las frecuencias naturales del sistema.

En la Fig. 9.2, se encuentra en movimiento en un modo principal, a una frecuencia $\omega$, una serie de masas torsionales y de resortes torsionales. Para cada masa se escribirá una ecuación de movimiento en términos de las coordenadas generalizadas $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_i$ en donde

$$\theta_1 = \Theta_1 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\theta_2 = \Theta_2 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\theta_3 = \Theta_3 \operatorname{sen}\omega t$$
$$\cdots\cdots$$
$$\theta_i = \Theta_i \operatorname{sen}\omega t$$

$$\begin{aligned}
&-I_1\omega^2\Theta_1 + K_{12}(\Theta_1 - \Theta_2) = 0\\
&-I_2\omega^2\Theta_2 + K_{12}(\Theta_2 - \Theta_1) + K_{23}(\Theta_2 - \Theta_3) = 0\\
&-I_3\omega^2\Theta_3 + K_{23}(\Theta_3 - \Theta_2) + K_{34}(\Theta_3 - \Theta_4) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&-I_i\omega^2\Theta_i + K_{i(i-1)}(\Theta_i - \Theta_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{9.6}$$

**Fig. 9.2**



la amplitud $\Theta_2$ se puede expresar a partir de la primera ecuación de movimiento en términos de $\Theta_1$,

$$K_{12}(\Theta_2-\Theta_1)=-I_1\omega^2\Theta_1.$$

$$\Theta_2=\Theta_1-\frac{I_1\omega^2\Theta_1}{K_{12}}$$

la amplitud $\Theta_3$ se puede expresar a partir de las ecuaciones primera y segunda de movimiento, en términos de $\Theta_2$ y $\Theta_1$,

$$\Theta_3=\Theta_2+\frac{K_{12}}{K_{23}}(\Theta_2-\Theta_1)-\frac{I_2\omega^2\Theta_2}{K_{23}}$$

o

$$\Theta_3=\Theta_2-\frac{I_2\omega^2\Theta_2}{K_{23}}-\frac{I_1\omega^2\Theta_1}{K_{23}}$$

La amplitud $\Theta_4$ se puede expresar usando las ecuaciones primera, segunda y tercera, en términos de $\Theta_3$, $\Theta_2$ y $\Theta_1$. Es evidente que se puede escribir una serie para la amplitud de la masa $n$-ésima, en términos de $n$ — 1 ecuaciones de movimiento y las amplitudes de $n$ — 1 coordenadas.

Combinando ésta con la ecuación de movimiento para la $n$-ésima masa, ya que no existen fuerza o pareja externas,

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\omega^2\Theta_i=0 \quad (9.7)$$

Esta es otra forma de la ecuación de frecuencia. Las raíces de esta ecuación son los valores característicos o valores propios del sistema.

En la práctica, se tabulan las amplitudes y fuerzas o parejas de inercia por medio de cálculo mecánico o manual. Las amplitudes y fuerzas o parejas de inercia se usan para determinar sucesivamente el desplazamiento elástico de una masa con respecto a la siguiente. Comenzando con la amplitud de la primera masa como $\Theta_1$ = 1 radián, se encuentra la amplitud de la segunda masa. Pasando de una masa a la siguiente en sucesión, se determinan las amplitudes de todas éstas. Llamando a la suma de las fuerzas y parejas de inercia $y(\omega^2)$,

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\omega^2\Theta_i=y(\omega^2) \quad (9.8)$$

y graficando $y(\omega^2)$ como función de $\omega^2$, se pueden econtrar fácilmente las raíces o valores característicos. Una vez que se conoce la localización de una raíz aproximada, se pueden usar técnicas numéricas tales como la regla de Simpson, para encontrar más exactamente el valor característico. El Prob. Ej. 9.1 muestra la graficación y las raíces mencionadas.



## 9.4 SISTEMAS CINETICAMENTE EQUIVALENTES

Antes de hacer un estudio de la vibración torsional de un sistema es necesario sustituir los émbolos reciprocantes, los eslabonamientos mecánicos y las partes de máquinas por masas y resortes equivalentes que tengan propiedades cinéticamente equivalentes. Esto requiere juicio y experiencia, pero he aquí una historia sustancial de juicio y experiencia a partir de la cual se pueden hacer estas aproximaciones.

Se han estudiado ya los motores reciprocantes. En general, se suma el producto de la mitad de la masa de las partes reciprocantes por el cuadrado del radio de la manivela, con el momento de inercia real de las partes rotativas, para obtener el momento de inercia equivalente de un émbolo y de su manivela.

$$I_e=I_c+\tfrac{1}{2}m_p r^2$$

en done $I_C$ es el momento de inercia del cigüeñal y de las partes rotativas, y $m_p$ es la masa de las partes reciprocantes. Esta aproximación se usa con extensidad en la búsqueda de las frecuencias naturales y formas de modo de los motores de combustión interna.

Para partes de máquina con movimiento plano, tales como una biela, se considera que parte de la masa se encuentra en rotación y parte en traslación. El determinar qué fracción de la masa es cinéticamente equivalente a la biela, requiere dos condiciones. Una es que, el centro de masa permanezca sin cambio, y la otra es que no cambie el centro de percusión. Por lo general, no se pueden satisfacer simultáneamente ambas condiciones y debe hacerse un compromiso. Refiérase a la Sec. 3.7

Las características elásticas de una estructura compleja como la de un cigüeñal con nervaduras, muñones, diámetros variables, cuñas, etc., se detallan en forma extensa en trabajos masivos tales como la obra "*Practical Solution of Torsional Vibration Problems*" por W. Ker Wilson. Es impráctico aquí hacer más de unas pocas y simples afirmaciones. Excepto en el caso de flechas huecas, la rigidez torsional de un cigüeñal es aproximadamente la misma que la de una flecha sólida del mismo diámetro y la misma longitud. Esto se afecta por el número de muñones y la rigidez de las nervaduras de manivela.

En los sistemas engranados, el momento de inercia de masa y la rigidez torsional deben incluir el efecto de la inercia aumentada de las parte móviles que tienen velocidades más altas. Es convencional reducir un sistema engranado a un sistema efectivo, considerándolo como si se moviera a la velocidad más baja. En un sistema semejante, es fácil ver que el momento de inercia de masa efectivo será el momento de inercia de masa real, aumentado por un factor proporcional al cuadrado de la velocidad. La energía cinética del sistema efectivo, debe ser idéntica a la del sistema real. En los sistemas engranados, si $N$ es la relación de engranaje,

$$I_e = IN^2$$

Se puede hacer una analogía para el módulo elástico efectivo,

$$K_e = KN^2$$

En este caso, debería ser la energía potencial la que debiera permanecer sin cambio, tanto en el sistema real como en el efectivo.

## 9.5 VIBRACION FORZADA DE SISTEMAS TORSIONALES

La vibración forzada de estado estable de sistemas torsionales, puede ser manejada con simplicidad si no existe amortiguación. Aun si se halla presente la amortiguación, se puede despreciar si la frecuencia de la vibración forzada está lejos de una de las frecuencias resonantes en tanto como ±20%. Muchos casos de vibración forzada consisten simplemente de un motor o máquina únicos que impulsan una flecha con engranes, embragues, hélices o cualquier otra maquinaria impulsada. En tales casos, cada masa se mueve con el mismo movimiento armónico de la frecuencia forzante del impulsor. La resistencia constante de una hélice impulsada, o de una tracción sobre camino no constituye sino un desplazamiento constante del elemento elástico. Esto produce el mismo efecto que el de una carga estática. La función forzante proviene solamente del motor o máquina.

Si consideramos dos o más máquinas o motores en paralelo o en tándem, o si consideramos un sistema de varias masas en el que se fuerza a más de una masa, o si la resistencia impulsada es variable, como en el caso de una compresora reciprocante de aire, podemos superponer soluciones siempre que el sistema no tenga alinealidades. Habrá probablemente una diferencia de fase en el movimiento de una masa con respecto a otra y es más probable que se encuentre presente más de una frecuencia, pero estos hechos se desprenderán de la solución.

Tantos problemas prácticos consisten de una fuerza excitante única actuando sobre sólo una masa, que es muy útil considerar este sencillo problema. Sólo se hace necesario modificar la Ec. 9.7 para incluir una función forzante $M(\omega t) = M_i \operatorname{sen} \omega t$. Para la masa particular que se está forzando, el par de torsión $M_i$ se sumaría al par de torsión inercial. Para todas las otras, $M_i = 0$. Es posible que dos o más masas sean forzadas con la misma frecuencia y en fase, pero esto es altamente improbable. Esta es la razón por la que se toman simplemente las funciones forzantes y se superponen las soluciones. Pero también esto hace que la solución de la amplitud torsional de la vibración forzada en un motor de combustión interna sea más bien complicada.



$$\sum_{i=1}^{n} (I_i\omega^2\Theta_i - M_i) = 0 \qquad (9.9)$$

Numéricamente, se puede resolver esta ecuación para las amplitudes individuales tales como $\Theta_1$, $\Theta_2$ y $\Theta_3$.

Si la frecuencia forzante se encuentra en, o cerca de, la frecuencia resonante, no se puede despreciar la amortiguación. La amortiguación es lo único que evita que la amplitud sea infinita. La energía disipada a través de la amortiguación, debe ser igual a la energía suministrada por la función forzante a través de un ciclo completo.

$$\Delta U_{\text{dentro}} = \Delta U_{\text{fuera}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\Theta_i M_i \operatorname{sen}\phi_i = \sum_{i=1}^{n} \pi c_i \Theta_i^2 \omega \qquad (9.10)$$

Usando las relaciones modales del modo resonante, ya que la frecuencia forzante se encuentra en, o cerca la de resonancia, se puede resolver explícitamente la Ec. 9.10 para la amplitud torsional de cada masa. Esto sólo es útil cerca de la resonancia (±20%). Si la función forzante no se encuentra cerca de la resonancia, o si no se puede despreciar la amortiguación, aun puede utilizarse el método de Holzer, pero esto se vuelve más complicado. La función forzante en cada masa es

$$M(t) = M_i' \cos \omega t + M_i \operatorname{sen} \omega t$$

y la amplitud de cada masa es

$$\theta_i = \kappa_i \cos \omega t + \lambda_i \operatorname{sen} \psi t$$

Usando el mismo procedimiento que antes, se obtienen las ecuaciones simultáneas

$$\sum_{i=1}^{n} (I_i\omega^2\lambda_i + c_i\omega\kappa_i - M_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} (I_i\omega^2\kappa_i - c_i\omega\lambda_i - M_i') = 0 \qquad (9.11)$$

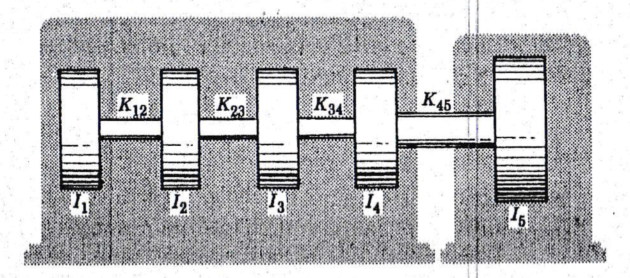
Estas constituyen un sistema conjugado de cálculos tabulares y son tediosas de resolver aun con la ayuda de la computadora. Existen mejores métodos disponibles de solución.

### *PROBLEMA EJEMPLO 9.1*

Un motor de gasolina de cuatro cilindros, está acoplado en forma directa a un generador eléctrico. Se ha reducido el sistema real a cinco masas rígidas

conectadas por secciones de flecha desprovistas de masa. El momento de inercia efectivo de las partes rotativas de cada cilindro es 1 kg·m². El momento efectivo de inercia del generador es 2 kg·m². El módulo elástico del cigüeñal de 40 mm entre cada cilindro es $1.5 \times 10^5$N·m/radián. La flecha de 50 mm de diámetro que acopla al motor con el generador, tiene un módulo elástico efectivo de $2 \times 10^6$N·m/radián.

Determínense, usando el método de Holzer, la frecuencia y forma de modo de la primera frecuencia natural en torsión.

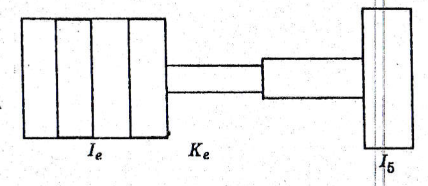



**Solución:**

**(a)** Se puede encontrar de cualquiera de dos modos, la frecuencia natural de un sistema, usando el método de Holzer. El primero consiste en buscar cada frecuencia natural por medio de una serie de pruebas, usando en cada una de éstas una frecuencia que se supone está cercana a la frecuencia natural real. La serie se concluye cuando

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\omega^2\Theta_i = 0.$$

Para comenzar, se debe tener una idea del orden de magnitud de la primera frecuencia natural. El sistema de cinco masas se puede simplificar de varias maneras, pero una más lógica sería la de agrupar todas las masas del motor en un lugar, creando un sistema de dos masas. Si localizamos la masa efectiva de los cuatro cilindros en el punto intermedio del motor, tendremos que hacer un ajuste del módulo elástico.




Para el motor, el momento de inercia efectivo es la suma,

$$I_e = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Para el módulo elástico de la flecha

$$\frac{1}{K_e} = \frac{2}{1.5\times10^5} + \frac{1}{1.5\times10^5} + \frac{1}{2\times10^5}$$

$$K_e = 0.4\times10^5 \text{ N} \cdot \text{m/radian}$$

Usando estos valores, la frecuencia natural del sistema simplificado es

$$\omega^2 = K_e\left[\frac{1}{I_e} + \frac{1}{I_5}\right] = 0.4\times10^5\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 3\times10^4 \text{ s}^{-2}$$

Por fortuna, éste es un número redondo, pero si no lo hubiera sido, lo hubiésemos redondeado a cualquier número de prueba conveniente.

Un cálculo tabular es un buen modo de organizar los cálculos cuando se usa el método de Holzer. En la segunda columna, se colocan en sucesión los momentos de inercia de cada masa. En la tercera columna se disponen las amplitudes. Como sabemos, éstas son arbitrarias, de modo que $\Theta_1$ se pone como 1 radián. Esto es más que sólo una conveniencia, pues también normaliza al vector modal. El producto $I_i\omega^2\Theta_i$ es el par de torsión inercial contribuido a cada masa. La suma $\Sigma_{i=1}^{n} I_i\omega^2\Theta_i$ es el par de torsión inercial total en la masa *i* que deflexionará la flecha elástica entre la masa elástica *i* y la masa *i* + 1. En la primera fila, esta entrada será el par de torsión inercial que causa la deflexión del cigüeñal entre el cilindro 1 y el cilindro 2. Si dividimos por el módulo del cigüeñal, tendremos el desplazamiento natural relativo entre $\Theta_1$ y $\Theta_2$. Sustrayendo, $\Theta_1 - \Theta_2$ de $\Theta_1$, se tiene el valor de $\Theta_2$. Esto se repite para $\Theta_3$, $\Theta_4$ y $\Theta_5$.

Pruébese $\omega^2 = 3 \times 10^4$ s$^{-2}$:

| $i$ | $I_i$ | $\Theta_i$ | $I_i\omega^2\Theta_i$ | $\Sigma I_i\omega^2\Theta_i$ | $K_{i(i+1)}$ | $\Theta_i - \Theta_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.0000 | $3.0000\times10^4$ | $3.0000\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.2000 |
| 2 | 1 | 0.8000 | $2.4000\times10^4$ | $5.4000\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.3600 |
| 3 | 1 | 0.4400 | $1.3200\times10^4$ | $6.7200\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.4480 |
| 4 | 1 | −0.0080 | $-0.0160\times10^4$ | $6.7040\times10^4$ | $2\times10^5$ | 0.3352 |
| 5 | 2 | −0.3432 | $-2.0592\times10^4$ | $4.6458\times10^4$ | — | — |

Si $\omega^2 = 3 \times 10^4$ s$^{-2}$ fuera una frecuencia natural, $\Sigma_{i=1}^{5} I_i\omega^2\Theta_i = 0$, lo que no es el caso. Esto requeriría un par de torsión externo de $4.6458 \times 10^4$N·m para impulsar el sistema de cinco masas cuando el vector modal de la columna 3, $\Theta_1$ tenga una amplitud de 1 radián en movimiento armónico a una frecuencia de $\omega = 173.2$ s$^{-1}$. Esta frecuencia es menor que la primera frecuencia natural. Si ésta estuviera levemente arriba de aquella, la suma $\Sigma_{i=1}^{5} I_i\omega^2\Theta_i$ habría sido negativa.

Trátese $\omega^2 = 4 \times 10^4 s^{-2}$.

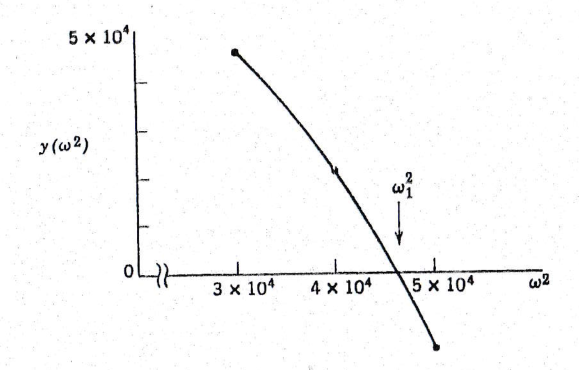
| $i$ | $I_i$ | $\Theta_i$ | $I_i\omega^2\Theta_i$ | $\sum I_i\omega^2\Theta_i$ | $K_{i(i+1)}$ | $\Theta_i - \Theta_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.0000 | $4.0000\times10^4$ | $4.0000\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.2666 |
| 2 | 1 | 0.7333 | $2.9333\times10^4$ | $6.9333\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.4622 |
| 3 | 1 | 0.2711 | $1.0844\times10^4$ | $8.0177\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.5345 |
| 4 | 1 | −0.2634 | $-1.0536\times10^4$ | $6.9641\times10^4$ | $2\times10^5$ | 0.3482 |
| 5 | 2 | −0.6116 | $-4.8928\times10^4$ | $2.0713\times10^4$ | — | — |

Esta es otra vez demasiado baja, pero está más cerca de la primera frecuencia natural, ya que el resto de la columna 5 es menos de lo que era cuando supusimos $\omega = 3 \times 10^4 s^{-2}$.

Trátese $\omega^2 = 5 \times 10^4 s^{-2}$.

| $i$ | $I_i$ | $\Theta_i$ | $I_i\omega^2\Theta_i$ | $\sum I_i\omega^2\Theta_i$ | $K_{i(i+1)}$ | $\Theta_i - \Theta_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.0000 | $5.0000\times10^4$ | $5.0000\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.3333 |
| 2 | 1 | 0.6667 | $3.3333\times10^4$ | $8.3333\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.5555 |
| 3 | 1 | 0.1111 | $0.5556\times10^4$ | $8.8889\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.5926 |
| 4 | 1 | −0.4815 | $-2.4075\times10^4$ | $6.4814\times10^4$ | $2\times10^5$ | 0.3241 |
| 5 | 2 | −0.8056 | $-8.0560\times10^4$ | $-1.5746\times10^4$ | — | — |

Esta prueba es demasiado alta $\Sigma_{i=1}^{5} I_i\omega^2\Theta_i = -1.5746 \times 10^4$ N·m/radián. Una simple graficación del par de torsión externo $y(\omega^2) = \Sigma_{i=1}^{5} I_i\omega^2\Theta_i$ vs $\omega^2$, permitirá la interpolación de aproximaciones cada vez más cercanas.

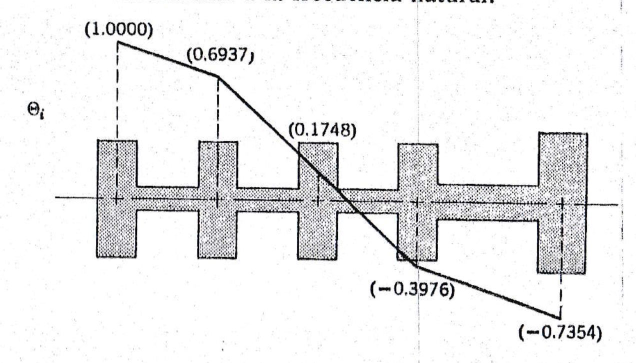


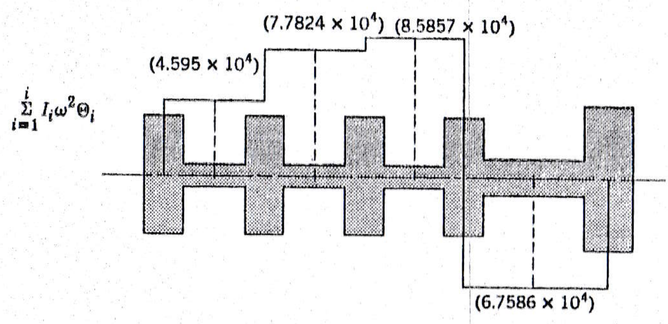



Las pruebas sucesivas convergirán en la primera frecuencia natural real, $\omega_1^2 = 4.595 \times 10^4 s^{-2}$.

| $i$ | $I_i$ | $\Theta_i$ | $I_i\omega^2\Theta_i$ | $\sum I_i\omega^2\Theta_i$ | $K_{i(i+1)}$ | $\Theta_i - \Theta_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.0000 | $4.5950\times10^4$ | $4.5950\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.3063 |
| 2 | 1 | 0.6937 | $3.1873\times10^4$ | $7.7824\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.5188 |
| 3 | 1 | 0.1748 | $0.8033\times10^4$ | $8.5857\times10^4$ | $1.5\times10^5$ | 0.5724 |
| 4 | 1 | −0.3976 | $-1.8271\times10^4$ | $6.7586\times10^4$ | $2\times10^5$ | 0.3378 |
| 5 | 2 | −0.7354 | $-6.7585\times10^4$ | 0 | — | — |

Esta es la primera frecuencia natural ya que $\Sigma_{i=1}^{5} I_i\omega^2\Theta_i = 0$.
Aunque éste es un modo elaborado de encontrar frecuencias naturales, proporciona dos dividendos. Uno es el vector modal, columna 3, y el otro es una evaluación del momento cortante de la flecha elástica, columna 5. Ambos se determinan simultáneamente a la frecuencia natural.



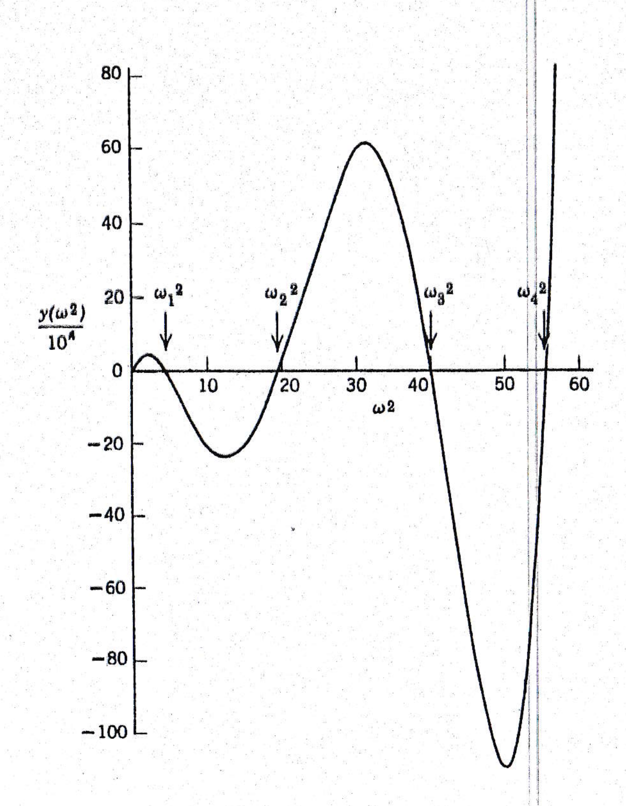




A partir del momento cortante, sólo hay un paso para determinar el esfuerzo cortante nominal en la flecha.

$$\tau = \frac{16M}{\pi d^3} = \frac{16(8.5857\times10^4)}{\pi(0.04)^3} = 6832 \text{ MN/m}^2/\text{radian}$$

Para el primer modo, el esfuerzo cortante máximo ocurre dentro del motor entre los cilindros 3 y 4, y sería de 6 832 MN/m² para un desplazamiento de 1 radián en el cilindro número 1. Es obvio que el desplazamiento no puede ser de un radián, pero podría hacerse una gráfica de torsión del desplazamiento real en el cilindro 1, y medirse el desplazamiento. Si sólo fuera 0.001 radián en la frecuencia natural, esto indicaría un esfuerzo cortante nominal máximo de 6.832 MN/m², que es por completo satisfactorio para una flecha de acero, aun considerando la concentración de esfuerzos en los barrenos para aceite, etc.

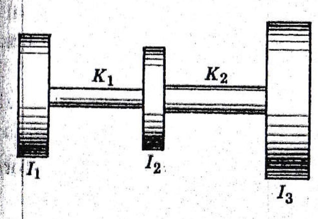
**(b)** El segundo modo de utilizar el método de Holzer, consiste en fijar $\Sigma_{i=1}^{5} I_i \omega^2 \Theta_i = y(\omega^2)$ y graficar lo demás como función de $\omega^2$. Ya que la ecuación es otra forma de la ecuación de frecuencia, sus raíces serán las frecuencias naturales. Adelante se grafica $y(\omega^2)$ vs $\omega^2$ mostrando cuatro frecuencias naturales. Nótese que la función pasa a través del origen confirmando que existe una frecuencia natural degenerada en $\omega^2 = 0$.






Comparando el vector modal y el valor de $y(\omega^2)$, es posible determinar si un valor particular de $\omega^2$ se encuentra por arriba o por abajo de una frecuencia natural. Por ejemplo, en *(a)*, $\omega^2 = 3 \times 10^4\ s^{-2}$ y $\omega^2 = 4 \times 10^4\ s^{-2}$ el valor de $y(\omega^2)$ es positivo. Sabemos que $\omega^2 = 5 \times 10^4\ s^{-2}$ estaba arriba de $\omega_1^2$ porque $y(\omega^2)$ era negativo y el vector modal tenía sólo un modo o un cambio de signo. Si hubiésemos tratado $\omega^2 = 50 \times 10^4\ s^{-2}$, $y(\omega^2)$ también habría sido negativo, pero el vector modal habría tenido tres modos.

---

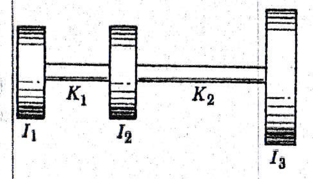



**PROBLEMA 9.2**

Determínense las dos frecuencias naturales y las formas de modo para esas frecuencias si

$I_1 = 0.2$ kg · m²  $K_1 = 100$ N·m/radián
$I_2 = 0.1$ kg · m²  $K_2 = 200$ N·m/radián
$I_3 = 0.4$ kg · m²

Respuestas: $\omega_1^2 = 500\ s^{-2}$  $\omega_2^2 = 3500\ s^{-2}$
$\Theta_1^{(1)} = 1.00$  $\Theta_1^{(2)} = 1.00$
$\Theta_2^{(1)} = 0$  $\Theta_2^{(2)} = -6.00$
$\Theta_3^{(1)} = -0.50$  $\Theta_3^{(2)} = 1.00$



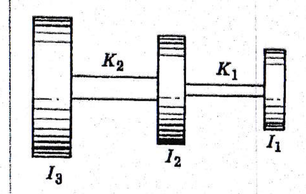

**PROBLEMA 9.3**

Determínense las dos frecuencias naturales y las formas de modo para esas frecuencias si

$I_1 = 1$ kg · m²  $K_1 = 10\,000$ N·m/radián
$I_2 = 1$ kg · m²  $K_2 = 5000$ N·m/radián
$I_3 = 2$ kg · m²

Respuestas:

$\omega_1^2 = 4313\ s^{-2}$  $\omega_2^2 = 23\,187\ s^{-2}$
$\Theta_1^{(1)} = 1.0000$  $\Theta_1^{(2)} = 1.0000$
$\Theta_2^{(1)} = 0.5687$  $\Theta_2^{(2)} = -1.3187$
$\Theta_3^{(1)} = 0.7844$  $\Theta_3^{(2)} = 0.1594$




**PROBLEMA 9.4**

Determínense las dos frecuencias naturales y las formas de modo para esas frecuencias si,

$I_1 = 1$ kg · m²  $K_1 = 10\,000$ N·m/radián
$I_2 = 2$ kg · m²  $K_2 = 20\,000$ N·m/radián
$I_3 = 10$ kg · m²

**PROBLEMA 9.5**

Repítase el Prob. 9.3, usando el método de Holzer.

**PROBLEMA 9.6**
Repítase el Prob. 9.4, usando el método de Holzer.

**PROBLEMA 9.7**
Un equipo motor generador consiste en un motor diesel de seis cilindros en línea y un generador. Cada cilindro del motor tiene un momento polar de inercia de masa efectivo de 15 kg·m². El cigüeñal tiene, entre cada cilindro, una rigidez torsional de $200 \times 10^5$ N·m/radián. El rotor del generador tiene un momento polar de inercia de 50 kg·m², y la flecha entre el generador y el motor tiene una rigidez torsional de $300 \times 10^5$ N·m/radián. Determínese la frecuencia natural y la forma de modo del primer modo.

**PROBLEMA 9.8**
Determínese la segunda frecuencia natural y la forma de modo para el Prob. 9.7.

**PROBLEMA 9.9**
Fijando $y(\omega^2) = \Sigma_{i=1}^{7} I_i \omega^2 \Theta_i$, grafíquese $y(\omega^2)$ hasta $\omega^2 = 10^6$ s$^{-2}$.

**PROBLEMA 9.10**
El diámetro normal de un cigüeñal es de 100 mm. Determínese el esfuerzo cortante por grado de amplitud en el cilindro número 1.

Respuesta: 659.6 MN/m²/grado

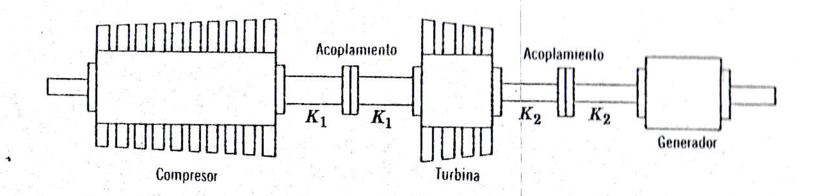
**PROBLEMA 9.11**
Se presenta adelante, en disposición esquemática, el rotor de una turbina de gas. Despréciese la inercia de las flechas y determínese la frecuencia fundamental y la forma de modo del sistema en vibración torsional.

| | |
|---|---|
| $I$ (rotor del compresor) | = 10 kg·m² |
| $I$ (rotor de la turbina) | = 5 kg·m² |
| $I$ (armadura del generador) | = 5 kg·m² |
| $I$ (acoplamiento) | = 1 kg·m² |

$$K_1 = 2 \times 10^6 \text{N·m/radián}$$
$$K_2 = 10^6 \text{N·m/radián}$$

Respuesta: $\omega_1^2 = 0.9586 \times 10^5$ s$^{-2}$



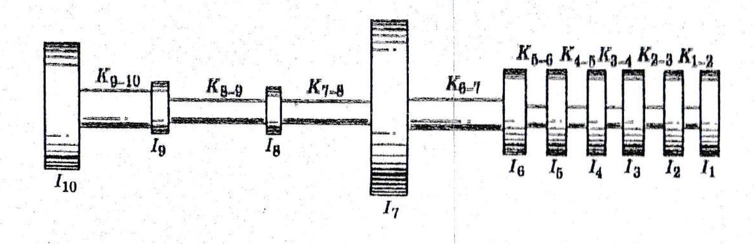



**PROBLEMA 9.12**
Determínese la segunda frecuencia natural y la forma de modo para el sistema de turbina de gas.

Respuesta: $\omega_2^2 = 3.866 \times 10^5$ s$^{-2}$

**PROBLEMA 9.13**
Para la característica, grafíquese el momento torsional como una función de la posición axial a lo largo de la flecha. (Para una flecha uniforme, ¿en dónde se encuentra el esfuerzo cortante máximo?)

**PROBLEMA 9.14**
Una unidad marina diesel de motor y bomba, consiste de un motor marino de seis cilindros, de dos ciclos, con potencia nominal de 240 caballos, caldera a 400 rpm, un volante, un acoplamiento, un aumentador de velocidad y una bomba centrífuga. Determínese, usando el método de Holzer, la primera frecuencia natural y la forma de modo. Se han corregido las constantes del sistema para la velocidad del motor diesel.




| | | |
|---|---|---|
| Cil | 6 | $Mr^2 = 36$ kg · m² |
| Cil | 7 | $Mr^2 = 80$ kg · m² |
| Cil | 8 | $Mr^2 = 9$ kg · m² |
| Cil | 9 | $Mr^2 = 12$ kg · m² |
| Cil | 10 | $Mr^2 = 60$ kg · m² |

$$K_{1\text{-}2\ a\ 5\text{-}6} = 1\,850\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{6\text{-}7} = 3\,000\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{7\text{-}8} = 2\,500\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{8\text{-}9} = 2\,650\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{9\text{-}10} = 4\,000\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$

Respuesta: $f_1 = 12.04$ Hz

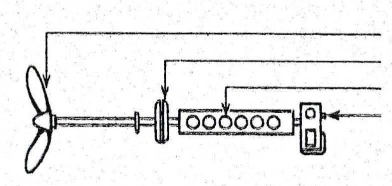
**PROBLEMA 9.15**

Determínense la segunda frecuencia natural y la forma de modo.

**PROBLEMA 9.16**

Determínese el máximo esfuerzo cortante nominal por grado de amplitud para los modos primero y segundo, si el cigüeñal tiene un diámetro nominal de 100 mm. Nótese que la respuesta estará en términos de un grado de amplitud a un número de masa 1.

Respuesta: 55.4 MN/m²/grado
—183.3 MN/m²/grado



**PROBLEMA 9.17**

Se muestra el sistema de impulsión por un motor marino de combustóleo de seis cilindros. Determínese la primera frecuencia natural de la instalación.

Momentos de inercia efectivos

| | |
|---|---|
| Hélice | = 9.5 kg·m² |
| Acoplamiento deslizable | = 2.5 kg·m² |
| Cada cilindro | = 8.0 kg·m² |
| Compresor de aire | = 6.0 kg·m² |

Módulos de flecha efectivos

Flecha del compresor de aire
= 600 000 N·m/radián

Cigüeñal entre cilindros
= 500 000 N·m/radián

Flecha de acoplamiento deslizable
= 1 000 000 N·m/radián

Flecha de la hélice
= 10 000 N·m/radián

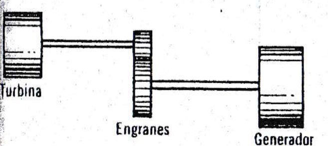
Respuesta: $f_1 = 5.48$ Hz

**PROBLEMA 9.18**

Determínese la segunda frecuencia natural para el Prob. 9.17

Respuesta: $f_2 = 17.9$ Hz





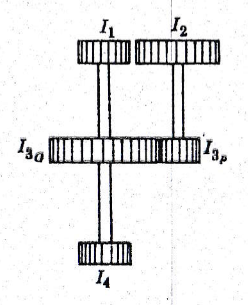

**PROBLEMA 9.19**

Un mando turboeléctrico tiene las siguientes características:

| | |
|---|---|
| $I$ (rotor de la turbina) | = 3 500 kg·m² |
| $I$ (piñón de la turbina) | = 50 kg·m² |
| $I$ (engrane del generador) | = 3 000 kg·m² |
| $I$ (armadura del generador) | = 5 000 kg·m² |

El módulo elástico de la flecha de la turbina es $1.2 \times 10^6$N·m/radián. El módulo elástico de la flecha del generador es $2 \times 10^6$N·m/radián. La velocidad de la turbina es de 5 400 rpm. La velocidad del generador es de 1 800 rpm. Despréciese la inercia de las flechas y determínense las frecuencias naturales correspondientes a los modos de vibración 1 y 2.

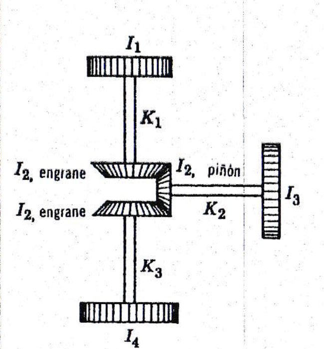
Respuesta: $f_1 = 3.075$ Hz; $f_2 = 10.17$ Hz




**PROBLEMA 9.20**

Determínese la frecuencia natural más baja del sistema torsional mostrado. La flecha 2-3 está engranada para trabajar a tres veces la velocidad de las flechas 3-4 y 1-3.

$$I_1 = 1.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_4 = 1.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_2 = 1.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I\ \text{piñón} = 0.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I\ \text{engrane} = 3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$K_{13} = 4000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{34} = 4000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$
$$K_{23} = 10\,000\ \text{N}\cdot\text{m/radián}$$




**PROBLEMA 9.21**

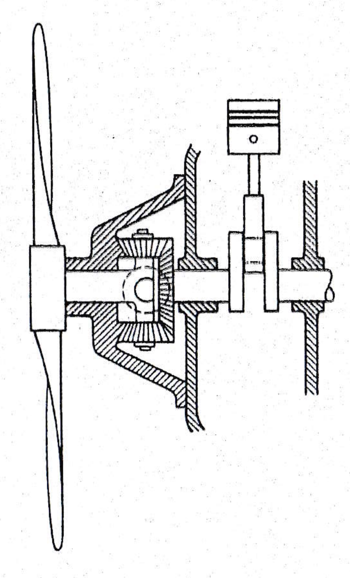
Determínese la frecuencia natural más baja del sistema torsional mostrado. $I_3$ trabaja a dos veces la velocidad de $I_1$, e $I_4$, e $I_4$, $I_1$ e $I_4$ trabajan a la misma velocidad.

$$K_1 = K_2 = K_3 = 10^4\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$$
$$I_3 = I_1 = 0.4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_2(\text{engrane}) = 0.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_2(\text{piñón}) = 0.025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_4 = 0.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

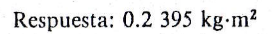
*Indicio:* Como una primera aproximación, considérese que los engranes están fijos. Esto es, un modo de los mismos.

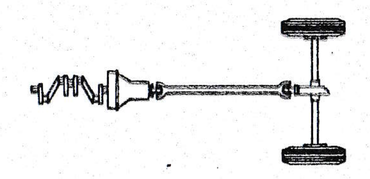
Respuesta: $\omega_1^2 = 2.0804 \times 10^4\ s^{-2}$
$\Theta_1^{(1)} = 1.00 \qquad \Theta_2^{(1)} = 0.16$
$\Theta_3^{(1)} = 1.00 \qquad \Theta_4^{(1)} = -4.18$

**PROBLEMA 9.22**
Determínese la segunda frecuencia natural del sistema torsional del Prob. 9.21

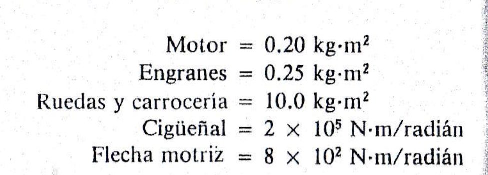


**PROBLEMA 9.23**
Un sistema de transmisión epicíclico para un motor aeronáutico radial, consiste de un engrane cónico $A$ *asegurado al cigüeñal del motor y cuatro engranes planetarios cónicos C,* libres de girar en brazos cortos integrales con la flecha de la hélice. La reducción de velocidad entre el cigüeñal y la flecha de la hélice, es de 2:1. El enganche cónico $A$ del cigüeñal y el engrane cónico fijo $D$, tienen el mismo número de dientes, que es tres veces el de cada engrane planetario. Cada engrane planetario tiene una masa de 1 kg, un momento polar de inercia de 0.003 kg·m², y está localizado a 100 mm a partir del eje de la flecha de la hélice. El momento de inercia polar efectivo de los brazos cortos planetarios es de 0.03 kg·m². El momento de inercia efectivo del engrane cónico del cigüeñal es de 0.02 kg·m². Determínese el momento efectivo de inercia de masa del sistema de engranes epicíclico, referido a la velocidad de la flecha de la hélice.


Respuesta: 0.2 395 kg·m²



**PROBLEMA 9.24**
Determínense las dos primeras frecuencias y formas de modo naturales para la transmisión de automóvil. Se dan las constantes del sistema. Nótese que el momento de inercia de las ruedas posteriores es por lo general grande, ya que éstas no pueden vibrar independientemente de la carrocería a menos que el vehículo se soporte separado del piso.



| | | |
|---|---|---|
| Motor | = | 0.20 kg·m² |
| Engranes | = | 0.25 kg·m² |
| Ruedas y carrocería | = | 10.0 kg·m² |
| Cigüeñal | = | 2 × 10⁵ N·m/radián |
| Flecha motriz | = | 8 × 10² N·m/radián |

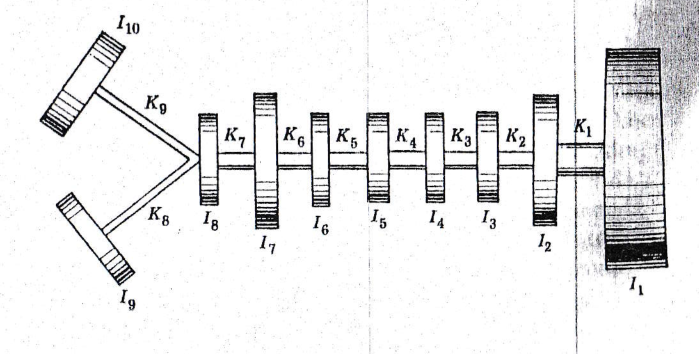


**PROBLEMA 9.25**
Determínese, usando el método de Holzer, la frecuencia fundamental de la disposición Quad G-71 de la Cia. General Motors

| | |
|---|---|
| Volante, $I_1$ | $Mr^2 = 3.3472$ kg · m² |
| Cilindro 6, $I_2$ | $Mr^2 = 0.0776$ kg · m² |
| Cilindros 2-5, $I_3$-$I_6$ | $Mr^2 = 0.0431$ kg · m² |
| Cilindro 1, $I_7$ | $Mr^2 = 0.0756$ kg · m² |
| Cubo del amortiguador, disco y hule, $I_8$ | $Mr^2 = 0.0442$ kg · m² |
| Amortiguador ligero, $I_9$ | $Mr^2 = 0.0442$ kg · m² |
| Amortiguador pesado, $I_{10}$ | $Mr^2 = 0.771$ kg · m² |

$K_1$ = 2 225 kN·m/radián
$K_{2\text{-}6}$ = 1 446 kN·m/radián
$K_2$ = 1 175 kN·m/radián
$K_8$ = 746 kN·m/radián
$K_9$ = 565 kN·m/radián

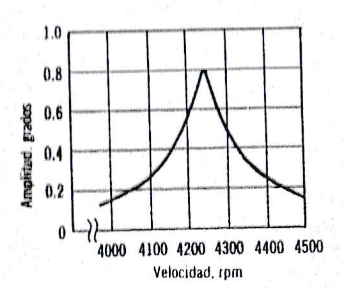

Respuesta: $\omega_1^2 = 8.375 \times 10^5\ s^{-2}$




**PROBLEMA 9.26**
Determínense, para un par de torsión armónico de 100 sen $\omega t$ en N·m, aplicado a la masa $I_2$ del Prob. 9.4 y con $\omega$ = 1 080 rpm, las amplitudes forzadas de vibración.

Respuesta: $\Theta_1 = -0.00815$ radián;
$\Theta_2 = 0.00227$ radián;
$\Theta_3 = -0.000422$ radián

**PROBLEMA 9.27**
Se aplica una pareja armónica $M$ = 10 sen $\omega t$ en donde $\omega^2$ = 15 790 s⁻² o 20 rps y $M$ se encuentra




en N·m, a $I_2$ del Prob. 9.3. Determínese la amplitud forzada de cada masa.

**PROBLEMA 9.28**

A 1 416 rpm, la tercera armónica del par de torsión aplicado a cada cilindro, se encuentra cerca de la respuesta del primer modo del motor del Prob. 9.7. Determínese la amplitud resonante para una tercera armónica de la cual se ha determinado separadamente que tiene un valor máximo de 9 000 N·m. Se muestra la curva de resonancia del motor según se ha determinado por una gráfica de torsión. Se supone que todos los cilindros tienen el mismo efecto sobre la rotación y características de amortiguación similares. Nótese que estos desplazamientos no constituyen el desplazamiento torsional total, ya que se encontrarán presentes otras armónicas, pero éstas están lejos de la resonancia.

Respuesta: $\Theta_1 = 0.51°$

# DIEZ

# SISTEMAS DISCRETOS

## 10.1 MATRICES DE ECUACIONES DE MOVIMIENTO

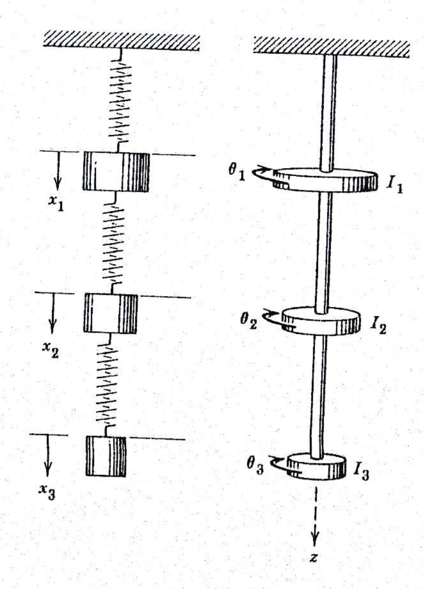
Existen otros métodos numéricos para encontrar los valores característicos y formas de modo de un sistema vibratorio con muchos grados de libertad. Uno de los más útiles, es la integración numérica de una matriz cuadrada derivada a partir de la ecuación de movimiento. Hay una ecuación de movimiento para cada grado de libertad, y si se usan coordenadas generalizadas, existe una coordenada generalizada por cada grado de libertad. Esto hace que la matriz de las ecuaciones de movimiento tenga un número igual de filas que de columnas, es decir, que sea *cuadrada*. La técnica de iteración se basa en el comportamiento de las propiedades de una matriz cuadrada de converger sobre el vector característico a través de multiplicaciones sucesivas de la matriz por sí misma. El conocer el vector característico o forma de modo, determina también los valores característicos.

Para mostrar un ejemplo del proceso de iteración de matriz, consideremos un sistema de tres masas. En la Fig. 10.1 se muestra un sistema semejante, tanto en forma torsional como lineal. Matemáticamente, los dos problemas son idénticos.

Escribiendo las tres ecuaciones de movimiento,

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_{12}(x_1 - x_2) - k_1x_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_{21}(x_2 - x_1) - k_{23}(x_2 - x_3)$$
$$m_3\ddot{x}_3 = -k_{32}(x_3 - x_2)$$

Fig. 10.1




Para movimiento armónico en un modo principal, todas las partes del sistema se mueven en un modo, con la misma frecuencia.

$$x_1 = X_1 \operatorname{sen} \omega t$$
$$x_2 = X_2 \operatorname{sen} \omega t$$
$$x_3 = X_3 \operatorname{sen} \omega t$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento y escribiéndolas en forma de matriz,

$$\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.1)$$

Para evitar una solución trivial, esta ecuación sólo se puede satisfacer si el determinante

$$\operatorname{Det}(\omega^2) = \begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix} = 0 \quad (10.2)$$

Algunos reconocerán inmediatamente este determinante como una antigua amiga, la ecuación frecuencia. Las raíces $\omega_1^2$, $\omega_2^2$ y $\omega_3^2$ son los valores característicos del determinante.



Expandiendo las ecuaciones de movimiento, otra forma de éstas sería

$$\begin{bmatrix} +k_{12}+k_1 & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & k_{21}+k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & k_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

La primera matriz es la matriz de rigidez $[K]$. La segunda es la matriz de masa $[M]$. La ecuación se puede escribir como

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (10.4)$$

En donde se ha simbolizado cada matriz. Las matrices de columna $\{X\}$ se diferencian por un diferente conjunto de corchetes, de las matrices cuadradas $[M]$ y $[K]$.

Multiplicando cada lado de la ecuación matricial 10.4 por la matriz inversa $[M^{-1}]$, lo que define la matriz para la cual el producto $[M^{-1}]$ $[M]$ es la matriz unidad $[I]$,

$$[M^{-1}][K]\{X\} = \omega^2[M^{-1}][M]\{X\} = \omega^2\{X\}$$

Ahora, si definimos una matriz $[A]$ como el producto de la multiplicación de la matriz inversa $[M^{-1}]$ por la matriz de rigidez $[K]$,

$$\begin{aligned} [M^{-1}][K] &= [A] \\ [A]\{X\} &= \omega^2\{X\} \end{aligned} \quad (10.5)$$

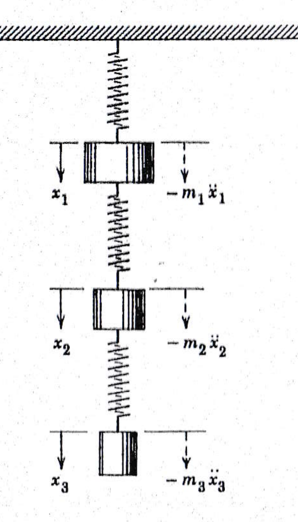
Este es el valor propio o característico del problema, que se satisface para cada vector característico $[X^{(r)}]$ con una frecuencia natural correspondiente $\omega_r^2$.

## 10.2 COEFICIENTES DE INFLUENCIA

También puede resolverse el problema mediante el uso de coeficientes de influencia, los que han sido adoptados extensamente en la ingeniería estructural.

Los coeficientes de influencia describen el desplazamiento a lo largo de una coordenada cuando la carga se realiza en la dirección de esa o de cualquier otra coordenada. Para el ejemplo de la Fig. 10.2, $a_{11}$ es el desplazamiento en la dirección de $x_1$ debido a una carga unitaria aplicada en la dirección de $x_1$; $a_{12}$ es el desplazamiento en la dirección de $x_1$ debida a una unidad de carga aplicada en la dirección de $x_2$,... $a_{ij}$ es el desplazamiento de la coordenada $x_i$ para una unidad de carga aplicada en la dirección de $x_j$. El desplazamiento total en $x_{ij}$ se puede expresar entonces como la suma de los desplazamientos ocasionados por todas las cargas aplicadas. Se supone que existen suficientes grados de libertad para describir por completo el desplazamiento total en ca-

**Fig. 10.2**




da punto discreto, debido a las fuerzas aplicadas o fuerzas componentes. Se usan cargas unitarias y los coeficientes de influencia se expresan como desplazamientos por unidad de fuerza (N/m, o radianes/N·m).

$$x_i = a_iF_1 + a_{i2}F_2 + a_{i3}F_3 + \cdots$$

Para cargas dinámicas, las fuerzas estáticas se reemplazan por fuerzas inerciales. El resultado es un conjunto de ecuaciones de movimiento, que se puede expresar también en forma matricial.

$$x_1 = -a_{11}m_1\ddot{x}_1 - a_{12}m_2\ddot{x}_2 - a_{13}m_3\ddot{x}_3$$
$$x_2 = -a_{21}m_1\ddot{x}_1 - a_{22}m_2\ddot{x}_2 - a_{23}m_3\ddot{x}_3$$
$$x_3 = -a_{31}m_1\ddot{x}_1 - a_{32}m_2\ddot{x}_2 - a_{33}m_3\ddot{x}_3$$

Usando una convención positiva hacia abajo como se muestra, las fuerzas inerciales serán hacia arriba. Estas se reflejan en los signos negativos. Para movimiento armónico en un modo principal, la aceleración tiene signo opuesto al del desplazamiento y

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}m_1\omega^2X_1 + a_{12}m_2\omega^2X_2 + a_{13}m_3\omega^2X_3 \\ X_2 &= a_{21}m_1\omega^2X_1 + a_{22}m_2\omega^2X_2 + a_{23}m_3\omega^2X_3 \\ X_3 &= a_{31}m_1\omega^2X_1 + a_{32}m_2\omega^2X_2 + a_{33}m_3\omega^2X_3 \end{aligned} \qquad (10.6)$$

Redisponiendo términos y en particular, dividiendo por $\omega^2$, se puede escribir el juego de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & a_{13}m_3 \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & a_{23}m_3 \\ a_{31}m_1 & a_{32}m_2 & a_{33}m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \qquad (10.7)$$



Estas ecuaciones son de la forma

$$[B]\{X\} = \frac{1}{\omega^2}\{X\} \qquad (10.8)$$

la que es similar a la Ec. 10.4, excepto por una matriz $[B]$ en lugar de $[A]$ y un módulo $1/\omega^2$ en lugar de $\omega^2$. Este es también un problema de valor característico, pero esta vez se puede satisfacer por un vector característico $\{X^{(r)}\}$ para un módulo correspondiente que es el inverso de la frecuencia natural $1/\omega_r^2$.

Esto no debe sorprender ya que las ecuaciones de movimiento (10.7) se pueden definir además como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \qquad (10.9)$$

o

$$[K^{-1}][M]\{X\} = \frac{1}{\omega^2}\{X\} \qquad (10.10)$$

La primera matriz es la matriz de flexibilidad, que es la inversa de la matriz de rigidez, y la segunda es la matriz de masa.

La preparación académica de la mayor parte de los ingenieros mecánicos, les permite escribir ecuaciones de movimiento sin dificultad, pero su conocimiento de los coeficientes de influencia dura poco. La preparación de la mayor parte de los ingenieros civiles o estructurales incluye cierta facilidad con los coeficientes de influencia, pero menos preparación en dinámica avanzada.

Pocos reconocen que la Ec. 10.9 se puede escribir directamente a partir de la Ec. 10.3, que demuestra cuán intercambiables son los métodos de iteración. La inversión de matrices es un problema de computación y puede tornarse un problema pequeño o grande, dependiendo de la matriz. La matriz inversa de otra $[A]$ se define como la matriz adjunta $[A^+]$ dividida por el valor del determinante de $[A]$. La matriz adjunta es una matriz de la cual los elementos son los cofactores de la matriz $[A]$ con los índices intercambiados (en otras palabras, la transpuesta de la matriz de los cofactores).

$$\frac{[A^+]}{|A|} = [A^{-1}] \qquad (10.11)$$

## 10.3 ITERACION DE MATRIZ

Para determinar los valores característicos y los vectores característicos asociados con el problema del valor característico se usa un proceso numérico de iteración.

Por ejemplo, consideremos la ecuación característica 10.8

$$[B]\{X\}=\frac{1}{\omega^2}\{X\}$$

Suponiendo un vector arbitrario $\{V_0\}$ en lugar del $\{X\}$ y multiplicando $\{V_0\}$ por $[B]$, tendremos una primera aproximación del valor característico $1/\omega^2$ y una primera aproximación del vector característico $\{V_1\}$. Si el vector arbitrario no es el vector característico, el nuevo vector $\{V_1\}$ se puede usar como un vector de prueba mejorado. Una secuencia de transformaciones lineales de vectores de prueba sucesivos, conducirá a un vector que, cuando se multiplique por $[B]$ se reproduzca a sí mismo. Ya que el vector satisface las ecuaciones características, éste debe ser un vector característico. La constante de proporcionalidad será el valor característico dominante. En este caso, será la inversa de la frecuencia natural más baja, $\omega_1^2$.

Si comenzáramos con la Ec. 10.5,

$$[A]\{X\}=\omega^2\{X\}$$

el proceso iterativo convergirá en el valor característico más grande de $\omega^2$. El vector correspondiente será el vector característico para la frecuencia natural más alta.

La explicación de este fenómeno requiere un conocimiento del comportamiento de las matrices, pero brevemente, el vector arbitrario $\{V_0\}$ se puede escribir como una expresión lineal

$$\{V_0\}=c_1\{X^{(1)}\}+c_2\{X^{(2)}\}+\cdots+c_r\{X^{(r)}\}$$

en donde $X^{(1)}, X^{(2)},\ldots, X^{(r)}$ son los vectores modales característicos para los modos correspondientes, y $c_1, c_2\ldots, c_r$ son constantes, aunque desconocidas. Multiplicando por la matriz $[B]$ se obtiene la expresión

$$[B]\{V_0\}=c_1[B]\{X^{(1)}\}+c_2[B]\{X^{(2)}\}+\cdots+c_r[B]\{X^{(r)}\}$$

Ya que cada término satisface la ecuación característica, se puede reescribir la expresión como

$$[B]\{V_0\}=c_1\left(\frac{1}{\omega_1^2}\right)\{X^{(1)}\}+c_2\left(\frac{1}{\omega_2^2}\right)\{X^{(2)}\}+\cdots+c_r\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\{X^{(r)}\}$$

Este es también un nuevo vector $\{V_1\}$

$$\{V_1\}=c_1'\{X^{(1)}\}+c_2'\{X^{(2)}\}+\cdots+c_r'\{X^{(r)}\}$$

Aún se desconocen las constantes, pero éstas son proporcionales a las constantes para $\{V_0\}$.



Si multiplicamos otra vez por $[B]$

$$[B]\{V_1\}=[B]^2\{V_0\}=c_1\left(\frac{1}{\omega_1^2}\right)^2\{X^{(1)}\}+c_2\left(\frac{1}{\omega_2^2}\right)^2\{X^{(2)}\}+\cdots+c_r\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)^2\{X^{(r)}\}$$

Es obvio que en multiplicaciones sucesivas, los módulos más grandes dominarán la suma. Ya que estamos usando la recíproca $1/\omega^2$, el módulo dominante será la recíproca de la primera frecuencia natural y el vector de prueba se parecerá al primer vector característico. Después de $n$ iteraciones sucesivas,

$$\lim_{n\to\infty}[B]\{V_{n-1}^{(1)}\}=\frac{1}{\omega_1^2}\{V_n^{(1)}\}$$

Cada desplazamiento del vector característico resultante tendrá las mismas constantes de proporcionalidad con el elemento correspondiente en el vector de prueba.

En la práctica, un número finito de iteraciones dará un buen cálculo del primer modo, dependiendo del número de iteraciones de la precisión deseada. La utilidad verdadera del método sólo puede ser demostrada por medio de ejemplos.

## 10.4 LAS ECUACIONES DE DUNKERLEY-SOUTHWELL

Un método aproximado que tiene cierta similitud con las técnicas de iteración de matriz, se atribuye a S. Dunkerley y R. V. Southwell. S. Dunkerley desarrolló empíricamente un modo de encontrar la frecuencia natural de una viga en flexión cargada con masas concentradas, hallando por separado una serie de frecuencias naturales individuales para la viga soportando las masas concentradas individuales, una a la vez. Por esa razón, el método se relaciona con el de los coeficientes de influencia.

Retornando a la Ec. 10.6, otro modo de expresar la ecuación de frecuencia en forma matricial, sería

$$\text{Det}(\omega^2)=\begin{bmatrix}\left(a_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right) & a_{12}m_2 & a_{13}m_3\\ a_{21}m_1 & \left(a_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right) & a_{23}m_3\\ a_{31}m_1 & a_{32}m_2 & \left(a_{33}m_3-\frac{1}{\omega^2}\right)\end{bmatrix}=0 \quad (10.12)$$

Expandiendo la matriz

$$\begin{aligned}\text{Det}(\omega^2) = {} & \omega^6(m_1 m_2 m_3) \\ & \times (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{21}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{21}^2 - a_{11}a_{23}^2) \\ & - \omega^4(m_1 m_2(a_{22}a_{11} - a_{21}^2) + m_1 m_3(a_{33}a_{11} - a_{13}^2) \\ & + m_2 m_3(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)) + \omega^2(a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + a_{33}m_3) + 1 = 0\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de frecuencia con raíces $\omega_1^2$, $\omega_2^2$, y $\omega_3^2$ o

$$\text{Det}(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2) = 0 \qquad (10.13)$$

Expandiendo esta segunda ecuación,

$$\begin{aligned}\text{Det}(\omega^2) = {} & \omega^6 - \omega^4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \\ & + \omega^2(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_1^2\omega_3^2) - \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 = 0\end{aligned}$$

Ya que las ecuaciones son idénticas, Dunkerley razonó que los coeficientes de los términos $\omega^2$, $\omega^4$ y $\omega^6$ eran idénticos. En particular, para el término $\omega^2$,

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + a_{33}m_3 \qquad (10.14)$$

El ejemplo podría extenderse para incluir un mayor número de masas.

Para el caso en que $\omega_3^2 \gg \omega_2^2 \gg \omega_1^2$, se pueden despreciar los dos términos que incluyen las frecuencias más altas. El resultado es una expresión aproximada para $\omega_1^2$, que será alta. Esta es la ecuación de Dunkerley,

$$1/\omega_1^2 \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + a_{33}m_3 \qquad (10.15)$$

en términos de $a_{11}m_1$, $a_{22}m_2$, $a_{33}m_3$, que son las frecuencias naturales de cada masa actuando separadamente. Su precisión es muy dependiente de que $\omega_1^2$ sea mucho más baja que $\omega_2^2$ o que $\omega_3^2$.

R. V. Southwell, demostró que existía una ecuación complementaria usando constantes de resorte en lugar de coeficientes de influencia. Comenzando con la Ec. 10.2 y permitiendo un desarrollo similar,

$$\omega_3^2 \approx \frac{1}{a_{11}m_1} + \frac{1}{a_{22}m_2} + \frac{1}{a_{33}m_3} \qquad (10.16)$$

La ecuación de Dunkerley es un método aproximado para encontrar la frecuencia natural más baja y la ecuación de Southwell es un método aproximado para encontrar la frecuencia más alta. Otra vez, la precisión depende de la separación entre las frecuencias naturales. Estas ecuaciones son de uso limitado, pero son sencillas y permiten una aproximación rápida al valor de las frecuencias naturales más baja y más alta, a partir de los mismos datos.



## 10.5 ORTOGONALIDAD DE MODOS PRINCIPALES

Se puede encontrar un módulo característico dominante, tal como $\omega^2$ o su recíproco $1/\omega^2$, por medio de la iteración de una matriz cuadrada. Subsiste aún el problema de determinar los valores y vectores característicos que no corresponden a las frecuencias naturales máxima y mínima. Estos se encuentran por sostenimiento de la convergencia del módulo dominante, usando la *otorgonalidad de los modos principales.*

Este principio es simple de explicar haciendo referencia a nuestro ejemplo original. Designando el primer modo principal correspondiente a $\omega_1^2$ con un índice (1), el segundo modo principal correspondiente a $\omega_2^2$ con un índice (2), cada modo principal debe satisfacer las ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned}m_1X_1^{(1)}\omega_1^2 &= k_1X_1^{(1)} + k_{12}(X_1^{(1)} - X_2^{(1)}) \\ m_2X_2^{(1)}\omega_1^2 &= k_{21}(X_2^{(1)} - X_1^{(1)}) + k_{23}(X_2^{(1)} - X_3^{(1)}) \\ m_3X_3^{(1)}\omega_1^2 &= k_{32}(X_3^{(1)} - X_2^{(1)})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}m_1X_1^{(2)}\omega_2^2 &= k_1X_1^{(2)} + k_{12}(X_1^{(2)} - X_2^{(2)}) \\ m_2X_2^{(2)}\omega_2^2 &= k_{21}(X_2^{(2)} - X_1^{(2)}) + k_{23}(X_2^{(2)} - X_3^{(2)}) \\ m_3X_3^{(2)}\omega_2^2 &= k_{32}(X_3^{(2)} - X_2^{(2)})\end{aligned}$$

Multiplicando el primer juego de ecuaciones por $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$, y $X_3^{(2)}$, y el segundo juego de ecuaciones por $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ y $X_3^{(1)}$ y sustrayendo un conjunto del otro,

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)\{m_1X_1^{(1)}X_1^{(2)} + m_2X_2^{(1)}X_2^{(2)} + m_3X_3^{(1)}X_3^{(2)}\} = 0.$$

Si $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, esto sólo puede ser cierto si

$$\sum_{i=1}^{n} m_iX_i^{(j)}X_i^{(k)} = 0 \qquad (10.17)$$

Esta ecuación es una expresión de un principio conocido como de la otorgonalidad de los modos principales. Este se deriva en forma directa de las ecuaciones de movimiento, y representa una relación física entre los modos principales. Debe tenerse cuidado de observar que se usa la expresión correcta del principio de otorgonalidad, por ejemplo, en un cilindro que rueda con una velocidad $\dot{x}$, el término inercial incluye rotación, y no es simplemente $m\ddot{x}$. El término ortogonalidad es una interpretación geométrica referente a los vectores ortogonales $A$ y $B$, en la que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Si combinamos el principio de ortogonalidad con la Ec. 10.5, la ecuación matricial convergirá sobre el valor más grande de $\omega^2$, que se ortogonal al valor más alto de $\omega^2$. Inversamente, si hubiéramos usado coeficientes de influencia y combinado la Ec. 10.8 con el principio de ortogonalidad, la ecuación matricial convergiría sobre el valor más grande de $1/\omega^2$, que tiene vectores característicos ortogonales a los de la frecuencia natural más baja. Esta sería la segunda frecuencia natural más baja y su vector característico correspondiente.

Repitiendo este proceso, podemos determinar sucesivamente cada frecuencia natural y vector característico, comenzando ya sea con la frecuencia más alta, o con la frecuencia más baja.

## 10.6 COORDENADAS PRINCIPALES

Como aprendimos en el estudio de dos grados de libertad, es posible describir el movimiento de un sistema con dos grados de libertad, usando coordenadas principales. Lo mismo es verdad para sistemas de más de dos grados de libertad, y subsisten las mismas definiciones. Si se puede describir el movimiento de todas las partes del sistema por medio de una coordenada única, sin hacer referencia a ninguna otra, esa coordenada es una *coordenada principal.* Una coordenada principal es también una *coordenada generalizada,* que es el término que se da a un juego de coordenadas que reconocen la restricción. Las coordenadas principales se simbolizan por la letra $p$, esto es, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Existen tantas coordenadas principales como grados de libertad existan.

Cada coordenada generalizada es una combinación lineal de todas las coordenadas principales, a menos que la coordenada generalizada sea por sí misma una coordenada principal. Por motivos de claridad, usemos $q_1, q_2, q_3$, como coordenadas generalizadas, en lugar de $x_1, x_2, x_3$. Esto evitará cualquier confusión entre coordenadas y los vectores modales.

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 = X_1^{(1)}p_1 + X_1^{(2)}p_2 + X_1^{(3)}p_3 \\ x_2 &= q_2 = X_2^{(1)}p_1 + X_2^{(2)}p_2 + X_2^{(3)}p_3 \\ x_3 &= q_3 = X_3^{(1)}p_1 + X_3^{(2)}p_2 + X_3^{(3)}p_3 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Lo anterior significa que el primer modo representado por la coordenada principal $p_1$, se encuentra presente en las coordenadas generalizadas $q_1$, $q_2$, $q_3$, en proporción al vector característico del primer modo. El segundo modo se encuentra presente también en proporción a su vector característico, así como el tercero, cuarto, etc., dependiendo de cuántos grados de libertad pueda haber.



En forma de matriz, las ecuaciones anteriores quedan

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \tag{10.19}$$

Puede verse con facilidad que la matriz es la matriz modal, siendo cada columna la columna modal para uno de los modos naturales de vibración. Este hecho no es difícil de aceptar. Una definición de una frecuencia natural es que todas las partes del sistema vibratorio pasan, en un momento dado por un desplazamiento mínimo y por un desplazamiento máximo en otro momento. Estas son exactamente las palabras que se han usado para definir las coordenadas principales. Los modos principales y las coordenadas principales se corresponden, estando asociada cada coordenada con un modo separado. $p_1$ se asocia con la frecuencia natural $\omega_1$, $p_2$ se asocia con la frecuencia natural $\omega_2$, y así sucesivamente.

Para encontrar $p_1, p_2, p_3$, en términos de las coordenadas generalizadas, sólo se requiere reemplazar $q_1, q_2, q_3$, en la columna modal apropiada.

$$p_1 = \frac{\begin{bmatrix} q_1 & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ q_2 & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ q_3 & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix}} = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{10.20a}$$

$$p_2 = \frac{\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & q_1 & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & q_2 & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & q_3 & X_3^{(3)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix}} = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{10.20b}$$

$$p_3 = \frac{\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & q_1 \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & q_2 \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & q_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix}} = A_3 \cos \omega_3 t + B_3 \operatorname{sen} \omega_3 t \tag{10.20c}$$

Habiendo establecido las condiciones iniciales, es simple trabajo de álgebra llegar a las ecuaciones de movimiento, en términos de las coordenadas principales. Para encontrar las ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas generalizadas, debemos volver a las Ecs. 10.13. Para resolver por completo, si existen tres grados de libertad, necesitaremos seis coordenadas iniciales para obtener las seis constantes arbitrarias $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, y $B_3$.

En este punto, deben quedar muy claras dos cosas. Una es que, no se pueden fijar las condiciones iniciales para las coordenadas generalizadas sin resolver las coordenadas principales. La condición inicial de que $q_1(0) = 0$ cuando $t = 0$, no significa nada. Todos los modos posibles pueden hallarse presentes en la coordenada $q_1$. No podemos evaluar las constantes arbitrarias para $q_1$, sin evaluar simultáneamente todas las constantes arbitrarias. El segundo punto es la observación de por qué hemos hecho tanto hincapié sobre los valores característicos y los vectores característicos. Con muchos grados de libertad, los valores característicos y los vectores característicos constituyen las claves para una descripción general del movimiento.

## 10.7 VIBRACION FORZADA DE SISTEMAS CON MUCHOS GRADOS DE LIBERTAD

La vibración de sistemas con muchos grados de libertad, forzados por funciones forzantes armónicas, se puede tratar en forma muy sencilla como una extensión de nuestros métodos matriciales. Considérense las funciones forzantes $F_1(t) = Q_1e^{i\omega t}$, $F_2(t) = Q_2e^{i\omega t}$, y $F_3(t) = Q_3e^{i\omega t}$ como aplicadas en la dirección de las coordenadas generalizadas, $q_1$, $q_2$, y $q_3$. Se han usado los símbolos $Q_1$, $Q_2$, y $Q_3$ para hacer énfasis sobre el sutil punto de que éstas son fuerzas generalizadas en la dirección de las coordenadas generalizadas.

Se puede reescribir cada una de las tres ecuaciones de movimiento

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_{12}(x_1 - x_2) - k_1x_1 + Q_1e^{i\omega t}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_{21}(x_2 - x_1) - k_{32}(x_2 - x_3) + Q_2e^{i\omega t}$$
$$m_3\ddot{x}_3 = -k_{32}(x_3 - x_2) + Q_3e^{i\omega t}$$

Para movimiento armónico a una frecuencia $\omega$, las ecuaciones de movimiento es forma matricial se vuelven

$$\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \qquad (10.21)$$

Este es el mismo juego que el de la Ec. 10.1, excepto que el juego es igual a los vectores de fuerza $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ y no es igual a cero.

Este juego de ecuaciones se puede resolver explícitamente para $X_1$, $X_2$ y $X_3$.



Usando la regla de Cramer y sustituyendo sucesivamente el vector columna de las fuerzas en las columnas primera, segunda y tercera,

$$X_1 = \frac{\begin{bmatrix} Q_1 & -k_{12} & 0 \\ Q_2 & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ Q_3 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} Q_1 & -k_{12} & 0 \\ Q_2 & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ Q_3 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}(\omega^2)} \qquad (10.22\,a)$$

$$X_2 = \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & Q_1 & 0 \\ -k_{21} & Q_2 & -k_{23} \\ 0 & Q_3 & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & Q_1 & 0 \\ -k_{21} & Q_2 & -k_{23} \\ 0 & Q_3 & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}(\omega^2)} \qquad (10.22b)$$

$$X_3 = \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & Q_1 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & Q_2 \\ 0 & -k_{32} & Q_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & Q_1 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & Q_2 \\ 0 & -k_{32} & Q_3 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}(\omega^2)} \qquad (10.22c)$$

En cada caso, el denominador es el valor del determinante de la frecuencia forzante $\omega^2$, Det$\omega^2$.

Merece mención especial una variación particular de este análisis. Si sólo actúa una fuerza y todas las demás valen cero, los desplazamientos $X_1$, $X_2$ y $X_3$, son los productos de la fuerza $Q_1$ y los respectivos cofactores del determinante de frecuencia, divididos por el valor determinante de frecuencia.

$$X_1 = \frac{\begin{bmatrix} Q_1 & -k_{12} & 0 \\ 0 & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega_2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{32} \\ -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\text{Det}(\omega^2)} Q_1 = \alpha_{11} Q_1 \qquad (10.23)$$

La fracción se denomina la *receptancia* y se simboliza como $\alpha_{11}$. Para el desplazamiento $X_2$

$$X_2 = \frac{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & Q_1 & 0 \\ -k_{21} & 0 & -k_{23} \\ 0 & 0 & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (k_{12}+k_1-m_1\omega^2) & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & (k_{21}+k_{23}-m_2\omega^2) & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{bmatrix} -k_{12} & -k_{32} \\ 0 & (k_{32}-m_3\omega^2) \end{bmatrix}}{\text{Det}(\omega^2)} Q_1 = \alpha_{21} Q_1 \qquad (10.24)$$

Es obvio el paralelo con los coeficientes de influencia.

$$X_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 + \alpha_{13}Q_3 \qquad (10.25)$$

$\alpha_{12}$, $\alpha_{13}$,..., $\alpha_{21}$, $\alpha_{23}$,... son receptancias-cruz, según se diferencian de las *receptancias directas* $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}$, $\alpha_{33}$.

En alguna literatura se hace mucho con la receptancia. Esta es efectivamente la admitancia mecánica, y se puede evaluar para una masa, resorte o amortiguador únicos, o para cualquier combinación de elementos discretos.

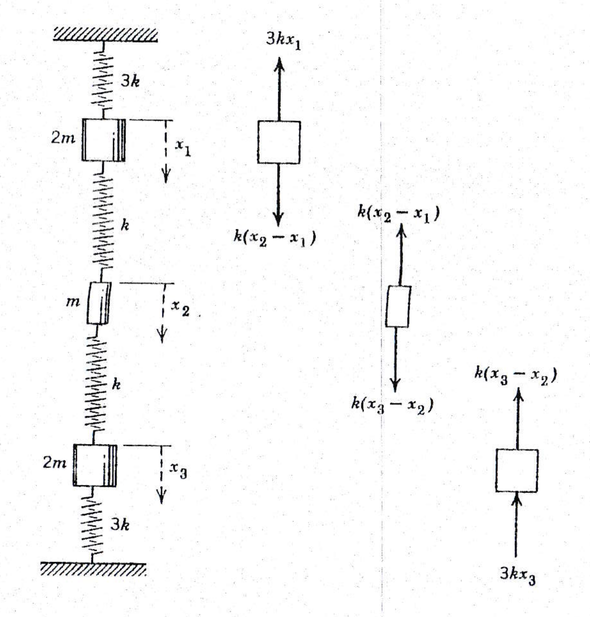


La frecuencia para la cual se hace infinita la receptancia, es la frecuencia natural del sistema. El concepto es simplemente otra forma de establecer ecuaciones de movimiento, que ciertos ingenieros hallan conveniente para ellos.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 10.1*

Determínense las frecuencias naturales y formas de modo para el sistema de tres masas, usando la iteración de matriz.




***Solución:***

Con objeto de lograr una percepción mayor de nuestro proceso de iteración, determinemos primero los valores exactos de las frecuencias naturales y formas de modo, encontrando los valores característicos de la ecuación de frecuencia.

Usando los diagramas de cuerpo libre, las ecuaciones de movimiento son

$$-3kx_1 - k(x_1 - x_2) = 2m\ddot{x}_1$$
$$-k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = m\ddot{x}_2$$
$$-3kx_3 - k(x_3 - x_2) = 2m\ddot{x}_3$$

Para movimiento armónico en un modo principal, $x_1 = X_1$ sen $\omega t$, $x_2 = X_2$

sen $\omega t$ y $x_3 = X_3$ sen $\omega t$. Disponiendo las ecuaciones de movimiento en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} (4k-2m\omega^2) & -k & 0 \\ -k & (2k-m\omega^2) & -k \\ 0 & -k & (4k-2m\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Haciendo el determinante igual a cero,

$$(4k-2m\omega^2)^2(2k-m\omega^2)-2k^2(4k-2m\omega^2)=0$$

de lo cual las tres frecuencias naturales son

$$\omega_1{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2{}^2 = \frac{2k}{m}$$

$$\omega_3{}^2 = \frac{3k}{m}$$

Las formas de modo correspondientes, normalizando en $X_1$, son

$$\text{para} \quad \omega_1{}^2 = \frac{k}{m}, \qquad X_1^{(1)} = 1, \quad X_2^{(1)} = 2, \quad X_3^{(1)} = 1$$

$$\text{para} \quad \omega_2{}^2 = \frac{2k}{m}, \qquad X_1^{(2)} = 1, \quad X_2^{(2)} = 0, \quad X_3^{(2)} = -1$$

$$\text{para} \quad \omega_3{}^2 = \frac{3k}{m}, \qquad X_1^{(3)} = 1, \quad X_2^{(3)} = -2, \quad X_3^{(3)} = 1$$

***Iteración de matriz usando coeficientes de influencia.*** Después de un poco de razonamiento y deducción, se puede encontrar que los coeficientes de influencia para este sistema son

$$a_{11} = \frac{7}{24k} \qquad a_{21} = \frac{1}{6k} \qquad a_{31} = \frac{1}{24k}$$

$$a_{12} = \frac{1}{6k} \qquad a_{22} = \frac{2}{3k} \qquad a_{32} = \frac{1}{6k}$$

$$a_{13} = \frac{1}{24k} \qquad a_{23} = \frac{1}{6k} \qquad a_{33} = \frac{7}{24k}$$



Usando la Ec. 10.7 y factorizando las constantes $m/k$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12}\frac{m}{k} & \frac{1}{6}\frac{m}{k} & \frac{1}{12}\frac{m}{k} \\ \frac{1}{3}\frac{m}{k} & \frac{2}{3}\frac{m}{k} & \frac{1}{3}\frac{m}{k} \\ \frac{1}{12}\frac{m}{k} & \frac{1}{6}\frac{m}{k} & \frac{7}{12}\frac{m}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

la ecuación matricial está lista ahora para iteración.

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Como vector de prueba, supongamos el vector arbitrario $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{6} \end{Bmatrix} = \frac{5}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esto establece que un vector de prueba mejorado sería $X_1 = 1$, $X_2 = 8/5$ y $X_3 = 1$, y la primera aproximación del módulo es $k/m\omega^2 = 5/6$.

Usando el vector de prueba mejorado e iteraciones sucesivas,

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{26}{15} \\ \frac{14}{15} \end{Bmatrix} = \frac{14}{15} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{13}{7} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{13}{7} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{41}{42} \\ \frac{80}{42} \\ \frac{41}{42} \end{Bmatrix} = \frac{41}{42} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{80}{41} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{80}{41} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{122}{123} \\ \frac{242}{123} \\ \frac{122}{123} \end{Bmatrix} = \frac{122}{123} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{121}{61} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{121}{61} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{365}{366} \\ \frac{728}{366} \\ \frac{365}{366} \end{Bmatrix} = \frac{365}{366} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{728}{365} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En este punto, deberá quedar muy claro que el módulo $k/m\omega^2$ está convergiendo sobre 1 000, a partir de lo cual $\omega_1{}^2 = k/m$.

El vector de prueba está convergiendo también sobre $X_1^{(1)} = 1$, $X_2^{(1)} = 2$, y $X_3^{(1)} = 1$. Después de cinco pruebas, el error es menor que 0.3%.

***Iteración de matriz usando ecuaciones de movimiento.*** Escribiendo las ecuaciones de movimiento en la forma matricial de la Ec. 10.3

$$\begin{bmatrix} 4k & -k & 0 \\ -k & 2k & -1 \\ 0 & -k & 4k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

La inversa de la matriz de masa es

$$[M^{-1}] = \frac{1}{4m}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación matricial de movimiento por $[M^{-1}]$,

$$\frac{1}{4m}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 4k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Factorizando las constantes $k/m$ y multiplicando las matrices,

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{m\omega^2}{k}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Esta forma de matriz está lista ahora para iteración. Como vector de prueba, podríamos usar el vector arbitrario $X_1 = 1, X_2 = 1$, y $X_3 = 1$, como se hizo antes, pero ya que este proceso iterativo convergirá sobre la frecuencia natural más alta, usemos ahora un vector arbitrario que tiene dos cambios de signo, $X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{2} \\ -4 \\ \frac{5}{2} \end{Bmatrix} = \frac{5}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Usando el vector de prueba mejorado, e iteración sucesiva,

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{26}{5} \\ \frac{14}{5} \end{Bmatrix} = \frac{14}{5}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{13}{7} \\ 1 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{13}{7} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{41}{14} \\ -\frac{40}{7} \\ \frac{41}{14} \end{Bmatrix} = \frac{41}{14}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{80}{41} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{80}{41} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{122}{41} \\ -\frac{242}{41} \\ \frac{122}{41} \end{Bmatrix} = \frac{122}{41}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{121}{61} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{121}{61} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{365}{122} \\ -\frac{728}{122} \\ \frac{365}{122} \end{Bmatrix} = \frac{365}{122}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{728}{365} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esta vez $m\omega^2/k = \frac{365}{122}$ u $\omega_3^2 = 2.992(k/m)$, que otra vez se encuentra muy cerca del valor verdadero $\omega_3^2 = 3(k/m)$.

## *PROBLEMA EJEMPLO 10.2*

Usando los resultados del problema anterior, determínense los desplazamientos $x_1$, $x_2$ y $x_3$ como función del tiempo, si en el tiempo $t = 0$ se desplaza la primera masa en una distancia de 25.4 mm a partir del reposo y se le libera entonces. No se desplazan las masas segunda y tercera en el tiempo $t$, sino que permanecen en reposo hasta que $t > 0$.

***Solución:***
Las coordenadas generalizadas son

$$x_1 = q_1 = X_1^{(1)}p_1 + X_1^{(2)}p_2 + X_1^{(3)}p_3$$
$$x_2 = q_2 = X_2^{(1)}p_1 + X_2^{(2)}p_2 + X_2^{(3)}p_3$$
$$x_3 = q_3 = X_3^{(1)}p_1 + X_3^{(2)}p_2 + X_3^{(3)}p_3$$

o en forma de matriz,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}.$$

en donde la matriz modal es

$$\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada coordenada principal es una función armónica del tiempo

$$p_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \operatorname{sen} \omega_1 t$$
$$p_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$$
$$p_3 = A_3 \cos \omega_3 t + B_3 \operatorname{sen} \omega_3 t$$

Para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, y $x_3(0) = 0$. Usando la Ec. 10.20 para $p_1$, $p_2$, y $p_3$,

$$A_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

Para las condiciones iniciales $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0)$, $\dot{x}_3 = 0$, $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Para las frecuencias naturales,

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = 2\frac{k}{m}$$

$$\omega_3^2 = 3\frac{k}{m}$$



La coordenadas principales son

$$p_1 = \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$p_2 = \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{2\frac{k}{m}}\, t$$

$$p_3 = \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{3\frac{k}{m}}\, t$$

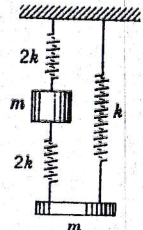
y las coordenadas generalizadas $x_1$, $x_2$, y $x_3$ son

$$x_1 = \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{2\frac{k}{m}}\, t + \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{3\frac{k}{m}}\, t$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{3\frac{k}{m}}\, t$$

$$x_3 = \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \tfrac{1}{2} \cos \sqrt{2\frac{k}{m}}\, t + \tfrac{1}{4} \cos \sqrt{3\frac{k}{m}}\, t$$

---




**PROBLEMA 10.3**

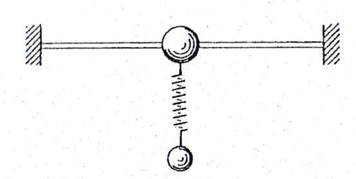
Establézcase una ecuación de iteracion para el sistema, usando coeficientes de influencia. Determínense la frecuencia y la forma de modo, del modo natural más bajo. Supóngase sólo movimiento lineal.

Respuesta: $\omega_1^2 = 1.4385 \dfrac{k}{m}$

**PROBLEMA 10.4**

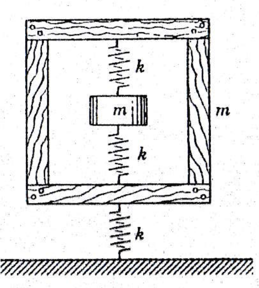
Establézcase una ecuación de iteración para el sistema del Prob. 10.3 usando las ecuaciones de movimiento. Determínense la frecuencia y la forma de modo del modo natural más alto. Supóngase movimiento lineal.

Respuesta: $\omega_2^2 = 5.562 \dfrac{k}{m}$



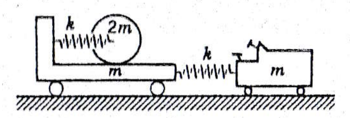
**PROBLEMA 10.5**

El peso de una viga elástica empotrada en sus extremos, es despreciable. Una masa de 4 kg hace que la viga se flexione 6 mm. Se soporta una segunda masa de 2 kg como se muestra, por medio de un resorte con constante de 4 000 N/m. Calcúlese la frecuencia natural más baja del sistema, usando el método de los coeficientes de influencia.



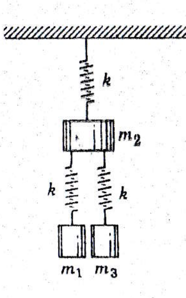

**PROBLEMA 10.6**

Se repite el empaque de resortes sometidos a la tensión de Prob. 8.23. El paquete interior está soportado por resortes a tensión, desde la caja exterior. La elasticidad de la caja se muestra como un resorte $k$. Establézcase una ecuación matricial para el sistema, y determínense por iteración las dos frecuencias naturales.




**PROBLEMA 10.7**

Se usa un sistema de tractor y remolque, para transportar grandes cilindros (de papel, tubos, etc.) en una planta industrial. Encuéntrense las frecuencias y modos naturales del sistema. Supóngase que el cilindro rueda sin deslizar sobre el remolque. El tractor y el remolque tienen cada uno una masa de 3 000 kg y el cilindro grande, único, tiene una masa de 6 000 kg. El resorte tiene una elasticidad de 175 N/mm.



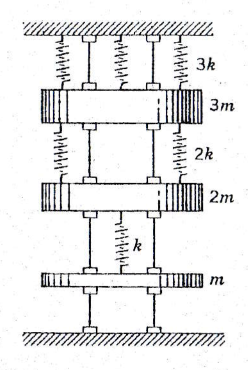

**PROBLEMA 10.8**

Determínese la frecuencia natural más baja y la forma de modo del sistema de tres masas. $m_2$ no gira en ninguno de los modos. ($m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$.)

Respuesta: $\omega_1{}^2 = 0.219\,\dfrac{k}{m}$; $X_1^{(1)} = 1.0000$;

$$X_2^{(1)} = 0.7807;\ X_3^{(1)} = 1.0000$$






**PROBLEMA 10.9**

Usando iteración de matriz, determínese la frecuencia natural más baja y su forma de modo correspondiente, para el sistema de tres masas. Cada masa se mueve sin fricción a lo largo de las barras de guía.

Respuesta: $\omega_1{}^2 = 0.2991\,\dfrac{k}{m}$; $X_1^{(1)} = 1.0000$;

$$X_2^{(1)} = 2.0513;\ X_3^{(1)} = 2.9270$$

**PROBLEMA 10.10**

Usando iteración de matriz, determínense la frecuencia natural más alta y la forma de modo correspondiente.

Respuesta: $\omega_3{}^2 = 2.563\,\dfrac{k}{m}$; $X_1^{(3)} = 1.000$;

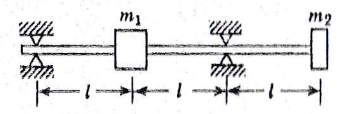
$$X_2^{(3)} = -1.344;\ X_3^{(3)} = 0.859$$

**PROBLEMA 10.11**

Demuéstrese que los modos primero y segundo del Prob. 9.2 son ortogonales.

**PROBLEMA 10.12**

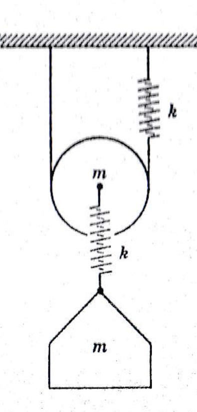
Demuéstrese que los modos primero y segundo del Prob. 9.3 son ortogonales.




**PROBLEMA 10.13**

Determínense las frecuencias naturales y formas de modo primeras y segundas, para la flecha que gira en los cojinetes y soporta dos masas concentradas $m_1$ y $m_2$, siendo $m_1 = 2m_2$.

Respuesta: $\omega_1{}^2 = 0.868\,\dfrac{EI}{m_2 l^3}$; $\omega_2{}^2 = 5.53\,\dfrac{EI}{m_2 l^3}$




**PROBLEMA 10.14**
Determínense, usando el principio de ortogonalidad, la segunda frecuencia natural y forma de modo del Prob. 10.9.

Respuesta: $\omega_2^2 = 1.3044\dfrac{k}{m}$; $X_1^{(2)} = 1.000$;

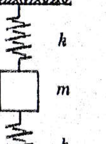
$$X_2^{(2)} = 0.544;\ X_3^{(2)} = -1.787$$

**PROBLEMA 10.15**
Determínense la frecuencia y forma de modo de los modos segundo y tercero del Prob. 10.8, usando el principio de ortogonalidad e iteración de matriz. *Indicio:* Normalícese sobre $m_1$ o $m_3$, pues la iteración de matriz no covergerá si se normaliza sobre $m_2$.

Respuesta: $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$; $\omega_3^2 = 2.28\dfrac{k}{m}$

**PROBLEMA 10.16**
Se soporta una polea de masa $m$ por medio de un cable y un resorte de rigidez $k$. Una segunda masa igual a la primera, se soporta por medio de un resorte idéntico desde el eje de la polea. Determínense las dos frecuencias y formas de modo naturales para el movimiento vertical. La polea es libre de girar alrededor del eje que pasa por el centro geométrico y el cable no desliza.

Respuesta: $\omega_1^2 = 0.741\dfrac{k}{m}$; $\omega_2^2 = 3.59\dfrac{k}{m}$

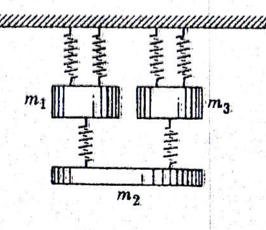


**PROBLEMA 10.17**
Determínense, usando iteración de matriz y coeficientes de influencia, la frecuencia natural más baja y la forma de modo.

Respuesta: $\omega_1^2 = 0.198\dfrac{k}{m}$

$$X_1^{(1)} = 1.000;\ X_2^{(1)} = 1.802;\ X_2^{(1)} = 2.247$$





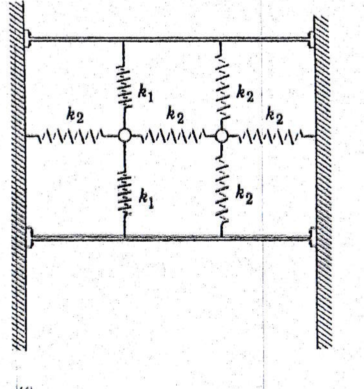

**PROBLEMA 10.18**
Determínense las frecuencias y formas de modo naturales para el sistema mostrado, usando iteración de matriz y el principio de ortogonalidad. Supóngase que ninguna de las masas gira. Todos los resortes y masas son idénticos. *Indicio:* normalícese sobre $m_1$ o $m_3$, pues la iteración de matriz no convergerá si se normaliza sobre $m_2$. ¿Por qué no?

Respuesta: $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$; $\omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$; $\omega_3^2 = \dfrac{4k}{m}$

**PROBLEMA 10.19**
Determínense las coordenadas principales del Prob. 10.9 en términos de las coordenadas generalizadas $x_1$, $x_2$, $x_3$. *Indicio:* úsense las respuestas de los Probs. 10.9, 10.10 y 10.14.

**PROBLEMA 10.20**
Determínese la respuesta para la vibración libre de cada masa del Prob. 10.9, si la masa $m_3$ se desvía estáticamente 10 mm y se libera desde la posición de reposo.






**PROBLEMA 10.21**
Dos masas idénticas, cada una de 2 kg, se suspenden en un marco vertical como se muestra. Se desplaza la masa del lado derecho 20 mm hacia la derecha, y 10 mm hacia abajo y se sostiene en su posición a la masa izquierda en su posición original. Se liberan ambas masas simultáneamente desde el reposo. Descríbase el movimiento de ambas masas. Puede considerarse que los desplazamientos de 10 y 20 mm son pequeños. ($k_1$ = 4kN/m, $k_2$ = 2 kN/m.)

**PROBLEMA 10.22**
Se modela una estructura mediante un sistema de tres masas. Las frecuencias naturales son

$$\omega_1^2 = 0.19808\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = 1.55496\frac{k}{m}$$

$$\omega_3^2 = 3.24696\frac{k}{m}$$

Los modos normales son

$$X_1^{(1)} = 1.00000 \qquad X_1^{(2)} = 1.00000 \qquad X_1^{(3)} = 1.00000$$
$$X_2^{(1)} = 0.80192 \qquad X_2^{(2)} = -0.55499 \qquad X_2^{(3)} = -1.24696$$
$$X_3^{(1)} = 0.44504 \qquad X_3^{(2)} = -1.24706 \qquad X_3^{(3)} = 1.80195$$

Para el modelo, todos los resortes tienen un módulo de 4 000 N/m y cada masa es de 5 kg. Estando el sistema en reposo, se golpea la masa extrema con una bola de 0.5 kg, la que imparte a dicha masa extrema una velocidad de 100 mm/s y después rebota, alejándose. Determínense las ecuaciones de movimiento para cada una de las tres masas.

**PROBLEMA 10.23**

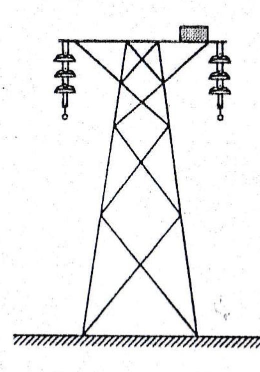
Una viga en voladizo se flexiona 2 mm bajo una carga de 500 N aplicada en su extremo, y tiene una frecuencia natural observada de 10.2 Hz. Si se usa la viga para soportar una maquinaria con masa de 75 kg, aproxímese la nueva frecuencia natural.

Respuesta: 6.83 Hz.

**PROBLEMA 10.24**

Una armadura de puente tiene una frecuencia natural de 6.1 Hz, determinada por prueba y se flexiona 3 mm a medio claro bajo la carga de un vehículo de 10 000 kg. Aproxímese la frecuencia natural del puente y el vehículo.

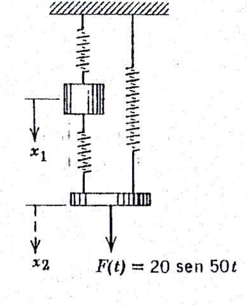
Respuesta: 5.07 Hz.



**PROBLEMA 10.25**

Una torre para transmisión de acero, de 20 m, muestra una frecuencia resonante de 5 Hz cuando se le hace vibrar por medio de un agitador excéntrico dispuesto en la cruceta. La masa del agitador es de 25 kg. Con una masa adicional de 30 kg en la cruceta, se hace disminuir la frecuencia resonante a 4 Hz. ¿Cuál es la frecuencia natural fundamental de la torre?






**PROBLEMA 10.26**

Determínese, para el Prob. 10.3, la amplitud de movimiento forzado de cada masa, si la masa inferior se fuerza por $F(t) = 20$ sen $50t$. Usense $k = 2\,000$ N/m y $m = 2$ kg.

Respuesta: $X_1 = -6.15$ mm; $X_2 = -4.62$ mm

**PROBLEMA 10.27**

Para el Prob. 10.9, $k = 1\,000$ N/m y $m = 2$ kg. Si se fuerza la masa 3 por medio de una función armónica $F(t) = Fe^{i\omega t}$, en donde $\omega = 5$ Hz y $F = 10$ N, determínense las amplitudes de estado estable de $m_1$, $m_2$ y $m_3$.

**PROBLEMA 10.28**

Para el Prob. 10.18, $k = 2\,000$ N/m, y cada masa es de 3 kg. Si se fuerza la masa 2 por medio de una función armónica $F(t) = Fe^{i\omega t}$, en donde $\omega = 8$ Hz, y $F = 40$ N, determínense las amplitudes de estado estable de $m_1$ y $m_2$.

**PROBLEMA 10.29**

Supóngase, para el Prob. 10.8, que se aplica una fuerza oscilante $F(t) = 5$ sen $\omega t$ a una de las dos masas más pequeñas. Para un valor de $\omega^2$, seleccionando $\omega^2 = 100$, 400, 900, 1 600, 2 500 o 3 600 s$^{-2}$, determínense las amplitudes de movimiento de $m_1$ y $m_2$ para $k = 1\,500$ N/m, y $m = 1$ kg.

**PROBLEMA 10.30**

Un edificio de cinco pisos se puede visualizar como un sistema de masas soportado por una estructura capaz de deformarse sólo en corte. Para un desplazamiento horizontal de 2 mm con un período de ¼ de segundo, determínese la amplitud máxima en cada piso.

$m_5$, $m_4$, $m_3$, $m_2$, $m_1$; $x = Ae^{i\omega t}$

$k_5 = 5 \times 10^8$ N/m $\qquad k_2 = 14 \times 10^8$ N/m
$k_4 = 9 \times 10^8$ N/m $\qquad k_1 = 18 \times 10^8$ N/m
$k_3 = 14 \times 10^8$ N/m

$m_5 = 0.5 \times 10^6$ kg $\quad m_2 = 0.8 \times 10^6$ kg
$m_4 = 0.6 \times 10^6$ kg $\quad m_1 = 1.0 \times 10^6$ kg
$m_3 = 0.7 \times 10^6$ kg

Respuesta:
$X_1 = +3$ mm $\quad X_2 = -4.5$ mm
$X_3 = -1.5$ mm $\quad X_4 = +4$ mm
$X_5 = +11$ mm

## 10.8 VECTORES DE ESTADO Y MATRICES DE TRANSFERENCIA

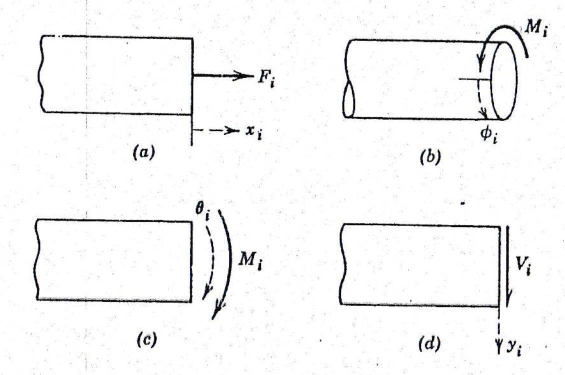
La iteración usa las propiedades del comportamiento de una matriz cuadrada y es una excelente técnica para resolver el problema del valor característico, pero tiene ciertas limitaciones. Una de éstas es, que los errores son acumulativos. Si existe un error residual en el primer vector característico, al detenerse la iteración, ese error habrá entrado en la matriz, si se usa la técnica de ortogonalidad. El segundo vector característico tendrá un error heredado del primer vector característico. Después de dos, tres o más iteraciones sucesivas, el error total puede llegar a ser bastante grande. Por supuesto, el uso de la computadora moderna y de un gran número de cifras significativas, puede reducir los errores en los modos más altos. En segundo lugar, aunque los errores de cálculo sólo hacen lenta la convergencia del proceso de iteración, los errores en la matriz original impedirán una resolución correcta y los errores pueden volverse muy difíciles de detectar. Finalmente, el tamaño de la matriz aumenta en relación a $n^2$, el cuadrado del número de grados de libertad. Los problemas aquí mostrados son bastante sencillos, con dos, tres o cuatro grados de libertad que requieren matrices de dos-por-dos, tres-por-tres y cuatro-por-cuatro. Cien grados de libertad es un gran número de grados, pero algunos problemas complejos requieren de cien coordenadas generalizadas para describir el movimiento. Esto requerirá $10^4$ terminales de almacenamiento en un banco de memoria. Aun para una gran computadora moderna, la técnica de iteración de matriz es lenta y tediosa. Como alternativa, se pueden usar vectores de estado y matrices de transferencia para limitar el tamaño de las matrices al número de términos necesario para describir por completo los vectores de fuerza y desplazamiento en cuaquier punto dado.

Un vector de estado es un vector columna que tiene todas las componentes de las fuerzas y desplazamiento en un punto, tal como una localización $i$. En esto incluimos al par de torsión, corte y momento flexionante en la descripción generalizada de fuerza y desplazamiento angular y lineal en la descripción generalizada de desplazamiento.

Por ejemplo, en la Fig. 10.3a la fuerza axial $F_i$ ocasiona un desplazamiento



**Fig. 10.3**




$x_i$. El vector de estado $\{x_i\}$ es simplemente

$$\{z_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ F_i \end{Bmatrix} \tag{10.26a}$$

El desplazamiento axial y la fuerza axial describen los estados de desplazamiento y fuerza. En la Fig. 10.3b, el par de torsión $T_i$ y el desplazamiento angular $\phi_i$ describen el estado de fuerza y desplazamiento. En la Fig. 10.3c, lo hacen el momento flexionante $M_i$ y el desplazamiento angular $\theta_i$. En la Fig. 10.3d, lo hacen el corte $V_i$ y el desplazamiento vertical $y_i$.

$$\{z_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ T_i \end{Bmatrix} \tag{10.26b}$$

$$\{z_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ M_i \end{Bmatrix} \tag{10.26c}$$

$$\{z_i\} = \begin{Bmatrix} y_i \\ V_i \end{Bmatrix} \tag{10.26d}$$

Puede ocurrir cualquier combinación de dos, tres o cuatro fuerzas, requiriendo cuatro, seis u ocho vectores en el vector de estado. Por ejemplo, si ocurren conjuntamente corte y momento flexionante

$$\{z_i\} = \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} \tag{10.26e}$$

Si se usan todas las cuatro

$$\{z_i\}=\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ T_i \\ M_i \\ V_i \\ F_i \end{Bmatrix} \qquad (10.26f)$$

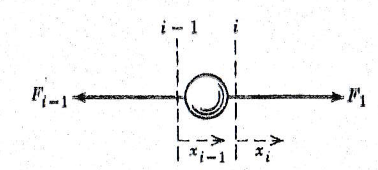
La disposición de términos es arbitraria, ya que cada término del vector columna está conectado con una fila en la matriz de transferencia, que es una descripción de esa fuerza o desplazamiento particular. Como una forma de conveniencia, las filas se pueden intercambiar.

La *matriz de transferencia* transfiere los vectores de estado de una localización a otra. Recuérdese que se está trabajando con sistemas discretos, con todas las propiedades inerciales concentradas en puntos discretos separados por elementos elásticos desprovistos de masa. La separación de estas propiedades requiere dos matrices de transferencia separadas y diferentes

Una matriz de *transferencia de punto* transfiere el vector en la estación $i-1$ al vector en la estación $i$, en donde $i$ e $i-1$, son dos lados del mismo punto. Haciendo referencia a la Fig. 10.4, existen dos ecuaciones que describen el desplazamiento y la fuerza, una cinemática y la otra cinética. Ya que la masa $m$ está concentrada en un punto, los desplazamientos en la estación $i-1$ y en la estación $i$, son los mismos.

$$x_{i-1}=x_i$$

**Fig. 10.4**






De la ecuación de movimiento,

$$\sum \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{x}}_i$$

$$F_i - F_{i-1} = m\ddot{x}_i$$

Para movimiento armónico en un modo principal, $x_i = X_i e^{i\omega t}$, y estas dos ecuaciones se pueden redisponer como

$$X_i = X_{i-1}$$

$$F_i = F_{i-1} - m\omega^2 X_i$$

En forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = [P_{i(i-1)}] \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix} \qquad (10.27)$$

Una *matriz de transferencia de campo*, transfiere al vector en la estación $i$ a través de una distancia espacial denominada campo. El desplazamiento en la estación $i$ no es el mismo que en la estación $i-1$. Para un resorte sin masa,

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$F_i = F_{i-1} = k(X_i - X_{i-1})$$

otra vez, fijando éstas como dos ecuaciones para movimiento armónico,

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = [F_{i(i-1)}] \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix}$$

Una ventaja de usar matrices de transferencia, es que, una vez que éstas han sido determinadas, se pueden usar otra vez. Todos los resortes sin masa tienen la misma matriz de transferencia de campo, excepto por el valor del módulo y todas las masas concentradas tienen la misma matriz de transferencia de punto, excepto por las propiedades inerciales.

Se puede usar los vectores de estado y las matrices de transferencia para lograr ventajas en sistemas grandes. Se puede modelar un sistema por una sucesión de resortes y masas, sin aumentar el número de términos de la matriz más allá del necesario para describir el vector de estado.

Ya que cada coordenada generalizada se acompaña por una fuerza generalizada, el almacenamiento de computadora necesario se limita a $2n$ términos.

El vector de estado en un punto se relaciona con el vector de estado en otro, por la multiplicación de matrices sucesivas.

$$\{z_{i+1}\}=[A]\{z_i\}$$
$$\{z_i\}=[B]\{z_{i-1}\}$$
$$\{z_{i+1}\}=[A][B]\{z_{i-1}\}$$

No existe límite para el número de multiplicaciones de matriz que se pueda hacer y teóricamente no hay límite para el número de grados de libertad que puede manejarse. Cada grado de libertad requerirá un paso adicional de multiplicación. Las condiciones de límite determinan el valor de los vectores de estado en cada extremo de la cadena, y una vez establecidas las condiciones de límite, podemos determinar ecuaciones para la fuerza y el desplazamiento. Recuérdese que cada fila de la ecuación matricial es una ecuación de fuerza o desplazamiento. Las ecuaciones de fuerza determinan la ecuación de frecuencia; las ecuaciones de desplazamiento determinan la forma de modo.

## 10.9 VIBRACION FORZADA Y MATRICES EXTENDIDAS

Un modo alterno de manejar vibraciones forzadas, usando vectores de estado y matrices de transferencia, es extender las matrices en una fila y en una columna, para acomodar las fuerzas. Por ejemplo, la masa discreta de la Fig. 10.5 también lleva aplicada la fuerza armónica $F(t) = Fe^{i\omega t}$. Con la adición de esta fuerza, la ecuación de movimiento es

$$\sum \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{x}}_i$$
$$F_i - F_{i-1} + Fe^{i\omega t} = m\ddot{x}_i$$

Esta es la primera de dos ecuaciones necesarias para describir el estado de los vectores de fuerza y desplazamiento en la estación $i$ y en estación $i$ — 1. La segunda es la declaración cinemática de que los desplazamientos en la estación $i$ y en la estación $i$ — 1, son idénticos, estando la masa concentrada en un punto.

$$X_i = X_{i-1}$$

Estas dos ecuaciones conducen a la ecuación matricial,

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.28}$$

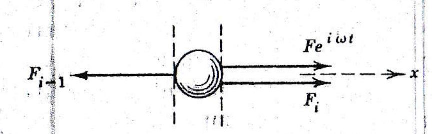



**Fig. 10.5**



Esta ecuación es la misma que la Ec. 10.27, con el término adicional $\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$

Para acomodar el término adicional en una matriz, podemos añadir una tercera ecuación a las dos que ya tenemos.

$$1 = [0 \quad 0]\begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix} + 1 \tag{10.29}$$

Esta es simplemente la identidad 1 ≡ 1. Combinando, la matriz extendida para la masa discreta es

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{10.30}$$

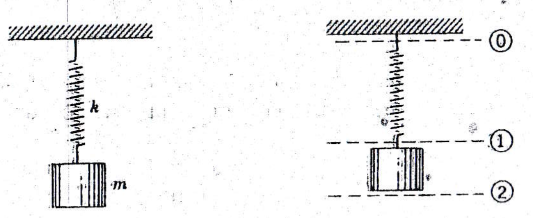
En forma similar, la ecuación de matriz extendida para un resorte es

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{10.31}$$

Los problemas que surgen de la vibración forzada de los sistemas discretos, se pueden resolver usando los vectores de estado y las matrices de transferencia de la misma manera que en los de vibraciones libres. El tamaño de la matriz ha sido extendido para incluir la adición de una fuerza aplicada. No obstante, estas ecuaciones no son homogéneas, y se pueden resolver explícitamente para amplitud y fuerza. Por supuesto, podríamos extender estas ecuaciones aún más.

### *PROBLEMA EJEMPLO 10.31*

Resuélvase, para la frecuencia natural de un sistema simple de resorte y masa, usando vectores de estado y matrices de transferencia.



*Solución:*
Todas las propiedades inerciales están contenidas en la masa suspendida $m$. La matriz de transferencia es

$$[P_{2-1}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -m\omega^2 & 1\end{bmatrix}$$

Todas las propiedades elásticas están contenidas en el resorte. La matriz de campo es

$$[F_{1-0}]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

El vector de estado en la estación 1, se puede encontrar a partir del vector de estado en la estación 2

$$\{z_1\}=[F_{1-0}]\{z_0\}$$

y,

$$\{z_2\}=[P_{2-1}]\{z_1\}=[P_{2-1}][F_{1-0}]\{z_0\}$$

Si multiplicamos las dos matrices, podemos determinar la fuerza y el desplazamiento en la estación 2 directamente a partir de la estación 1

$$\begin{Bmatrix}X_2\\ F_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -m\omega^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\\ F_0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}X_2\\ F_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ -m\omega^2 & \left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_0\\ F_0\end{Bmatrix}$$

***Vibración libre.*** Se establecen, para la vibración libre, las condiciones de límite $F_2 = 0$ y $X_0 = 0$. Esto conduce a dos ecuaciones,

$$X_2=\frac{F_0}{k}$$

y,

$$0=\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)F_0$$

La primera es una expresión para el desplazamiento de la masa en términos de la fuerza en el resorte. La segunda es la ecuación de frecuencia

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$



***Vibración forzada.*** Para la vibración por $F_2(t) = Fe^{i\omega t}$, el valor máximo de la función forzante armónica es $F$. En este caso, las condiciones de límite son $F_2 = F$, y $X_0 = 0$. Otra vez tenemos dos ecuaciones

$$\begin{Bmatrix}X_2\\ F\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ -m\omega^2 & \left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ F_0\end{Bmatrix}$$

$$X_2=\frac{F_0}{k}$$

$$F=\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)F_0$$

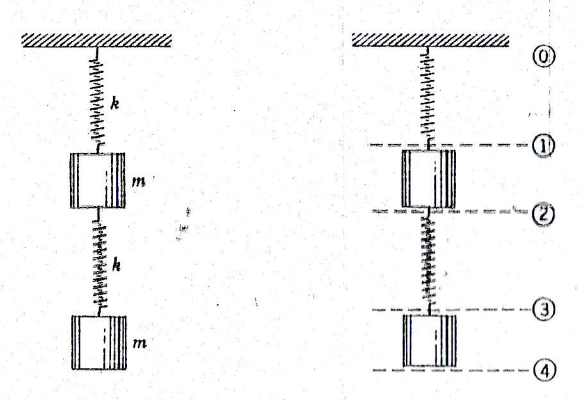
o, redisponiendo términos,

$$X_2=\frac{F}{k\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)}$$

que es la familiar respuesta de un sistema simple con grado de libertad único, a una función forzante armónica.

## *PROBLEMA EJEMPLO 10.32*

Resuélvase, para las frecuencias naturales y formas de modo en un sistema de dos masas consistente de dos resortes iguales y dos masas iguales, usando vectores de estado y matrices de transferencia.




*Solución:*
Este es el mismo problema de la Fig. 3.3 para el que

$$\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \omega_2^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}$$

Para dos masas, las matrices de transferencia de punto son

$$[P_{4-3}]=[P_{2-1}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para los dos resortes, las matrices de transferencia de campo son

$$[F_{3-2}]=[F_{1-0}]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede encontrar el vector de estado en la estación 4, a partir del vector de estado en la estación 0, si seguimos la multiplicación sucesiva

$$\{z_1\}=[F_{1-0}]\{z_0\}$$
$$\{z_2\}=[P_{2-1}]\{z_1\}$$
$$\{z_3\}=[F_{3-2}]\{z_2\}$$
$$\{z_4\}=[P_{4-3}]\{z_3\}$$

o,

$$\{z_4\}=[P_{4-3}][F_{3-2}][P_{2-1}][F_{1-0}]\{z_0\}$$

El realizar esta multiplicación sucesiva es una labor que requiere una técnica. Una de estas técnicas consiste en colocar la matriz que se va a multiplicar en la parte superior y el multiplicador a la izquierda de la matriz que va a ser el producto de los dos. Así,

$$\begin{matrix} & [F_{1-0} \quad\quad ] \\ [P_{2-1}] & [P_{2-1}\cdot F_{1-0}] \end{matrix}$$

La intersección de columnas en la matriz $[F_{2-1}]$ y las filas en la matriz $[F_{1-0}]$, localiza términos en la matriz que es el producto de $[P_{2-1}]$ $[_{1-0}]$. Por ejemplo,

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Aquí,

$$c_{11}=b_{11}\cdot a_{11}+b_{12}\cdot a_{21}$$
$$c_{12}=b_{11}\cdot a_{12}+b_{12}\cdot a_{22}$$
$$c_{21}=b_{21}\cdot a_{11}+b_{22}\cdot a_{21}$$
$$c_{22}=b_{21}\cdot a_{12}+b_{22}\cdot a_{22}$$



o,

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1-\frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

y,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1-\frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\{z_0\}=\{z_2\}$$

Este sistema coloca a la matriz producto en posición para ser multiplicada por la siguiente matriz de la cadena.

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{z_0\}=\{z_1\} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1-\frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\{z_0\}=\{z_2\} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1-\frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1-\frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\{z_0\}=\{z_3\} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1-\frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2} \\ \frac{m^2\omega^4}{k}-2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\{z_0\}=\{z_4\} \end{matrix}$$

***Vibración libre.*** Para vibración libre, las condiciones de límite son $X_0 = 0$ y $F_4 = 0$. Esto es

$$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m\omega^2}{k} & \dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2} \\ \dfrac{m^2\omega^4}{k}-2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este establecimiento de matriz se compone de dos ecuaciones

$$X_4=\left(\frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2}\right)F_0$$

y,

$$0=F_0\left[-m\omega^2\left(\frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\frac{m\omega^2}{k}\right]$$

La última es la ecuación de frecuencia

$$-m\omega^2\left(\frac{2}{k}-\frac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\frac{m\omega^2}{k}=0$$

$$\omega^4-3\frac{k}{m}\omega^2+\frac{k^2}{m^2}=0$$

a partir de la cual,

$$\omega_1{}^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \omega_2{}^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}$$

Aunque éste parece ser un modo complicado de encontrar la ecuación de frecuencia, puede acortarse, por ejemplo, si notamos que la primera columna se multiplica por la condición de límite $X_0 = 0$ para encontrar la fuerza $F_4$ no se necesita evaluar esa primera columna. Esta no entra en el cálculo.

***Modos normales.*** Para establecer los modos normales, debe normalizarse la amplitud en una de las dos masas, fijando $F_0/k = 1.000$. Para $\omega_i^2 = [(3-\sqrt{5})/2]\,(k/m)$

$$\{z_1\}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{F_0}{k} \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.000 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\{z_2\}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{F_0}{k} \\ \dfrac{(-1+\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.618k \end{Bmatrix}$$



$$\{z_3\}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m\omega^2}{k} & \dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{(1+\sqrt{5})F_0}{2k} \\ \dfrac{(-1+\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.618 \\ 0.618k \end{Bmatrix}$$

$$\{z_4\}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m\omega^2}{k} & \dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2} \\ \dfrac{m^2\omega^4}{k}-2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{(1+\sqrt{5})F_0}{2k} \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.618 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y para $\omega_2{}^2=[(3+\sqrt{5})/2]k/m$

$$\{z_1\}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{F_0}{k} \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.000 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\{z_2\}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{F_0}{k} \\ \dfrac{(-1-\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.618k \end{Bmatrix}$$

$$\{z_3\}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m\omega^2}{k} & \dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}\dfrac{F_0}{k} \\ \dfrac{(-1-\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.618 \\ -1.618k \end{Bmatrix}$$

$$\{z_4\}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m\omega^2}{k} & \dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2} \\ \dfrac{m^2\omega^4}{k}-2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\dfrac{2}{k}-\dfrac{m\omega^2}{k^2}\right)+1-\dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}\dfrac{F_0}{k} \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.618 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los modos normales se pueden obtener a partir de los vectores de estado. El primer modo es 1.000 y 1.618, el segundo modo es 1.000 y —0.618.

### PROBLEMA EJEMPLO 10.33

Resuélvase el Prob. Ej. 10.32 para $\omega^2 = 1\,000\ s^{-2}$, si $k = 1\,000$ N/m y $m = 2$ kg.

***Solución:***

El uso más común de los vectores de estado y las matrices de transferencia, para resolver problemas de vibración, se lleva a cabo a través dos métodos numéricos y usando computadoras. Para cualquier sistema de más de dos o tres grados de libertad, la multiplicación de matrices contenientes de símbolos para masa, elasticidad o desplazamiento en lugar de números, es una tarea imposible.

En el último problema, $k = 1\,000$ N/m. La matriz de transferencia de flexibilidad es

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia de masa, para $m\omega^2 = 2(1\,000) = 2\,000$ N/m, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2000 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la misma secuela de multiplicaciones que antes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ -2000 & -1 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2000 & -1 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_3\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6000 & -1 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_4\}$$

El resultado final es una ecuación matricial en la cual el vector de estado en la Ec. 4 se fija en términos del vector de estado en la estación 0, y una matriz que contiene los número $u_{11}$, $u_{12}$, $u_{21}$, y $u_{22}$

$$\{z_4\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \{z_0\}$$

o,

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ F_0 \end{Bmatrix}$$

Esto comprende en verdad dos afirmaciones,

$$X_4 = u_{11}X_0 + u_{12}F_0$$
$$F_4 = u_{21}X_0 + u_{22}F_0$$

Para las condiciones de límite, $X_0 = 0$ y $F_4 = 0$, $u_{22}$ debe ser cero. Ya que esto no es $\omega^2 = 1\,000$, no es una frecuencia natural.

Supóngase que hubiésemos usado $\omega^2 = [(3-\sqrt{5})/2]k/m = 190.98$ s$^{-2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_1\}$$

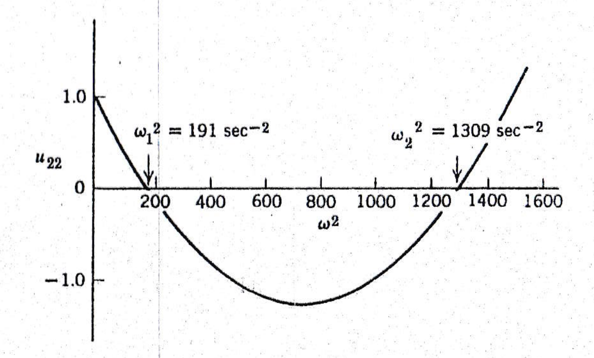
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -381.97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ -381.97 & +0.6180 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_2\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6180 & 0.00162 \\ -381.97 & 0.6180 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_3\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -381.97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6180 & 0.00162 \\ -236.1 & 0 \end{bmatrix} \{z_0\} = \{z_4\}$$

aquí, $u_{22} = 0$ y $\omega^2 = 190.98$ s$^{-2}$ es una frecuencia natural. Se desprende por lógica, graficar $u_{22}$ como función de $\omega^2$. Las raíces de esta función serán las frecuencias naturales.




Esto recuerda mucho el método de Holzer, y sin duda, es el mismo. La diferencia se encuentra en que los vectores de estado y las matrices de transferencia están adaptados para el uso de una computadora. En efecto, éste es un método de Holzer modernizado.

Para determinar el vector de estado en cualquier estación, simplemente se normaliza sobre la primera masa, fijando $F_0/k = 1\,000$ o usando $F_0 = 0.0005$ N. Los vectores de estado estarán en términos de 1 m de desplazamiento en la primera masa. Por supuesto, podríamos haber normalizado la segunda masa o cualquier masa si hubiera más que estas dos.

## 0.10 MATRICES DE TRANSFERENCIA PARA VIGAS

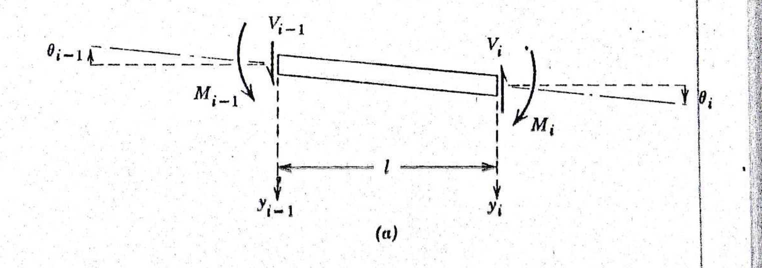
El problema de la vibración lateral de las vigas, es un problema de vibración que se puede resolver con éxito usando vectores de estado y matrices de transferencia. Las propiedades inerciales de la masa se concentran en un punto en una matriz de transferencia de punto y las propiedades elásticas de la viga se distribuyen en una matriz de transferencia de campo.

Para las viga sin masa de la Fig. 10.6a, las ecuaciones de equilibrio de un elemento de longitud $l$ son

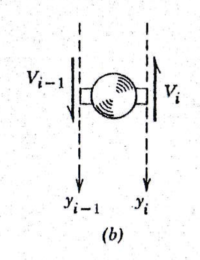
$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad (10.32a)$$

$$V_i = V_{i-1}$$

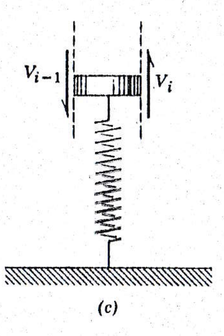
**Fig. 10.6**




(a)




(b)




(c)

y

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

$$M_{i-1} = M_i - V_i l \qquad (10.32b)$$

$$M_i = M_{i-1} + V_{i-1} l$$



La longitud $l$ es de una sección uniforme de la viga y es finita. El cambio en curvatura angular de la viga es

$$\Theta_i - \Theta_{i-1} = \frac{M_i l}{EI} - \frac{V_i l^2}{2EI}$$

Se considera la viga como si fuera un voladizo corto cargado en sus extremos. El signo para la deflexión angular por el momento flexionante es positivo, ya que convencionalmente se acepta una curvatura cóncava hacia abajo como curvatura positiva. Ya que el corte ocasiona una curvatura convexa, es negativo. Sustituyendo para $M_i$ y $V_i$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} + \frac{(M_{i-1} + V_{i-1} l) l}{EI} - \frac{V_{i-1} l^2}{2EI} \qquad (10.32c)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} + \frac{M_{i-1} l}{EI} + \frac{V_{i-1} l^2}{2EI}$$

La deflexión se encuentra, similarmente

$$Y_i - Y_{i-1} = \Theta_{i-1} l - \frac{V_i l^3}{3EI} + \frac{M_i l^2}{2EI}$$

Sustituyendo para $V_i$ y $M_i$, tenemos una cuarta ecuación,

$$Y_i = Y_{i-1} + \Theta_{i-1} l + \frac{M_{i-1} l^2}{2EI} + \frac{V_{i-1} l^3}{6EI} \qquad (10.32d)$$

Las Ecs. 10.32c y d fijan a $\theta_i$ y $Y_i$ en términos de desplazamiento lateral, desplazamiento angular, momento flexionante y corte, en la estación $i - 1$. Estas cuatro ecuaciones son todo lo que necesitamos para construir una matriz de transferencia que describa las propiedades elásticas de una sección de viga de longitud $l$ y rigidez contra flexión $EI$.

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ \Theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-1} \\ \Theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{Bmatrix} \qquad (10.33)$$

Existen cuatro términos en el vector de estado, lo que lo hace más grande que el juego anterior, pero si determinamos una vez la matriz de transferencia para una viga, ésta se puede usar para todas las secciones de la misma longitud y misma rigidez contra flexión.

La matriz de transferencia correspondiente para una masa puntual, debe

tener también cuatro términos en el vector de estado. En la Fig. 10.6b, a partir de la ecuación de movimiento,

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{y}} \tag{10.34a}$$

$$V_{i-1} - V_i = m\ddot{y} = -mY_i\omega^2$$

y para un punto,

$$Y_i = Y_{i-1} \tag{10.34b}$$

de lo que,

$$V_i = V_{i-1} + m\omega^2 Y_{i-1}$$

La matriz de transferencia de punto es

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ \Theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-1} \\ \Theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.35}$$

Las primeras tres filas son simplemente identidades. La ecuación de movimiento es la cuarta. Nótese que al escribir esta matriz de transferencia, $m\omega^2$ tiene signo positivo, en tanto que en la sección anterior $m\omega^2$ era negativo. En la convención de signos más usada para una viga, la curvatura cóncava y la deflexión positiva son hacia abajo y, el corte $V_{i-1}$-$V_i$ es positivo. Si hubiésemos usado curvaturas cóncavas hacia arriba y deflexión positiva hacia arriba como convención positiva, se invertirían nuestros signos ya que $V_i$-$V_{i-1}$ sería positiva. Debemos recordar que los signos son sólo una convención y deben usarse según convenga. Cualquier convención que usemos no establece ninguna diferencia, con tal que ésta se conserve a través de un problema dado.

Para un resorte, en contacto con la viga en un punto, usando la anterior convención de signos y haciendo referencia a la Fig. 10.6c,

$$\sum \mathbf{F} = 0 \tag{10.36}$$

$$V_{i-1} = V_i + kY_i$$

a partir de lo cual la matriz de transferencia es

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.37}$$

Tenemos ahora tres componentes, una sección de viga, un resorte y una masa concentrada con los cuales modelar nuestros problemas. El éxito dependerá ahora en gran parte de qué tan bueno es nuestro modelo, así como de nuestras matemáticas.



## 10.11 MATRICES DE TRANSFERENCIA ADIMENSIONALES

En varias secciones precedentes, se ha considerado a la masa y a la elasticidad como cantidades discretas constituyentes de propiedades distintas de un punto o de una sección corta, dependiendo de si las cantidades van a presentarse en una matriz de punto o en una matriz de campo. Siempre se ha simbolizado la masa por $m$, un resorte ha tenido un módulo elástico $k$, y una sección corta de viga ha tenido una rigidez contra flexión $EI$. No es conveniente mantener estos símbolos cuando se trabaja con matrices de transferencia. Las matrices de transferencia sólo son convenientes cuando usamos números y técnicas numéricas. De otra manera, aun el más sencillo de los problemas se convierte en una experiencia monumental.

Cada término de la matriz de transferencia tiene un diferente juego de unidades. Por ejemplo, en la matriz de transferencia para una viga, en la primera fila, el primer número, es un número puro, el segundo tiene unidades en cm, el tercero tiene unidades de kg$^{-1}$, y el cuarto, de kg$^{-1}$-cm$^{-1}$. Para evitar la probabilidad de errores de transcripción se pueden usar matrices de transferencia adimensionales. En una matriz adimensional, cada término es un número puro.

Para la matriz de transferencia elástica para un viga, la primer ecuación o primera fila se puede manejar adimensionalmente, dividiendo por $l$. $\bar{Y}_i$ es un número adimensional, $Y_i/l$

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{l} = \frac{Y_{i-1}}{l} + \Theta_{i-1} + \frac{M_{i-1}l}{2EI} + \frac{V_{i-1}l^2}{6EI}$$

La segunda ecuación es adimensional, pero la tercera y cuarta no lo son. La tercera se puede hacer adimensional multiplicando por $l/EI$, y la cuarta se puede hacer adimensional multiplicando por $l^2/EI$. Estas cantidades son combinaciones arbitrarias de dimensiones físicas, pero un poco de experimentación con números adimensionales demostrará que son únicas. Esto es,

$$\bar{\Theta}_i = \Theta_{i-1} + \frac{M_{i-1}l}{EI} + \frac{V_{i-1}l^2}{2EI}$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i l}{EI} = \frac{M_{i-1}l}{EI} + \frac{V_{i-1}l^2}{EI}$$

$$\bar{V}_i = \frac{V_i l^2}{EI} = \frac{V_{i-1}l^2}{EI}$$

Escribiendo las ecuaciones en forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{\Theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{V}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_{i-1} \\ \bar{\Theta}_{i-1} \\ \bar{M}_{i-1} \\ \bar{V}_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.38}$$

La matriz de transferencia para una sección corta de una viga, es ahora un conjunto de números puros.

Existe una matriz de transferencia adimensional correspondiente para una masa puntual. A partir de la ecuación de movimiento

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{y}}$$
$$V_{i-1} - V_i = -m\omega^2 Y_i$$

Para hacer adimensional la fuerza de corte, debe multiplicarse cada término por $l^2/EI$.

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{i-1} + \frac{m\omega^2 l^3}{EI}\bar{Y}_{i-1}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{\Theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{V}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{m\omega^2 l^3}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_{i-1} \\ \bar{\Theta}_{i-1} \\ \bar{M}_{i-1} \\ \bar{V}_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.39}$$

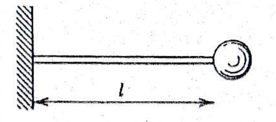
Para un resorte que actúa como soporte, debemos multiplicar cada término por $l^2/EI$.

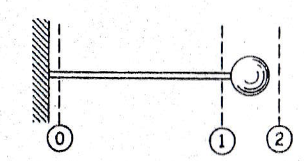
$$\sum \mathbf{F} = 0$$
$$V_{i-1} = V_i + kY_i$$
$$\bar{V}_i = \bar{V}_{i-1} - \frac{kl^3}{EI}\bar{Y}_i$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{\Theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{V}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{kl^3}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_{i-1} \\ \bar{\Theta}_{i-1} \\ \bar{M}_{i-1} \\ \bar{V}_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{10.40}$$

## *PROBLEMA EJEMPLO 10.34*

Determínese la frecuencia natural de una viga en voladizo, que soporta en un extremo una masa $m$, y está empotrada en una pared rígida en el otro.






***Solución:***

Se puede encontrar el vector de estado en la estación 1, a partir del vector de estado en la estación 0, usando la matriz de transferencia para una viga

$$\{z_1\} = [F_{1-0}]\{z_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{3EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_0 \\ \Theta_0 \\ M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix}$$

Se puede encontrar el vector de estado en la estación 2, a partir del vector de estado en la estación 1.

$$\{z_2\} = [P_{2-1}]\{z_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Theta_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Theta_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}$$

o combinando,

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Theta_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{3EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_0 \\ \Theta_0 \\ M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando las dos matrices de transferencia, se llega a la ecuación matricial,

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Theta_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ m\omega^2 & m\omega^2 l & \dfrac{m\omega^2 l^2}{2EI} & \left(1 + \dfrac{m\omega^2 l^3}{6EI}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_0 \\ \Theta_0 \\ M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix}$$

Existen cuatro condiciones de límite $Y_0 = 0$, y $\Theta_0 = 0$ en la pared y $M_2 = 0$ y $V_2 = 0$ en el extremo de la viga. Esto conduce a establecer, matricialmente

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ \dfrac{m\omega^2 l^2}{2EI} & \left(1+\dfrac{m\omega^2 l^3}{6EI}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix}$$

Para que esto sea verdad, el valor del determinante debe ser cero.

$$\text{Det}(\omega^2) = \left(1+\frac{m\omega^2 l^3}{6EI}\right) - \frac{m\omega^2 l^3}{2EI} = 0$$

o

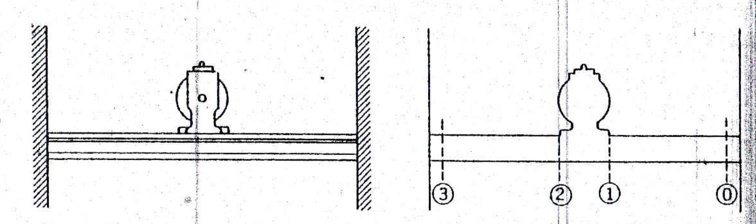
$$\omega^2 = \frac{3EI}{ml^3}$$

que es la frecuencia natural de una viga en voladizo que soporta una masa concentrada en un extremo.

Deberíamos hacer una cuidadosa comparación entre este problema y el Prob. Ej. 10.32. Ya que tenemos cuatro términos en el vector de estado, en lugar de dos, nuestra ecuación de frecuencia se determinará por una matriz de cuatro términos en lugar de sólo uno. Se deduce que si hubiésemos tenido un vector de estado de seis términos, nuestra ecuación de frecuencia habría sido determinada por una matriz de nueve términos.

## *PROBLEMA EJEMPLO 10.35*

Una losa de concreto, de 7 500 kg y 5 m por 4 m, descansa sobre vigas I de acero de 5 m de largo separadas entre sí un metro. Las vigas están empotradas en ambos extremos. En el centro de la losa descansa un equipo motor diesel generador de 1 000 kg. Las vigas tienen una masa de 52.09 kg/m, y tienen un momento de inercia de área de 94.48 × 10⁶ (mm)⁴. Determínese, usando métodos numéricos, vectores de estado y matrices de transferencia, un valor para la frecuencia natural.




*Solución:*

Este sistema se puede modelar dividiendo la viga en dos secciones, cada una de las cuales sea igual a la mitad de la viga total. La losa de concreto se modela incluyendo ⅜ de la masa total en el centro del claro. Así,



$$M = \tfrac{3}{8}(7500+5(5)(52.09)) + 1000 = 4300.84 \text{ kg}$$

Nuestra solución sólo será tan buena como la validez de este modelo.

Usando matrices de transferencia adimensionales, sólo será necesario evaluar $m\omega^2 l^3/EI$. Para $\omega^2 = 10^4$ s², $l = 2.5$ m,

$$\frac{m\omega^2 l^2}{EI} = \frac{(4300.84)(10^4)(2.5)^3}{(5)(205\times10^9)(94.48\times10^{-6})} = 6.9392$$

Comenzando con la estación 0 en la pared derecha y en la estación 3 a la izquierda,

$$\{\bar{z}_3\} = [F_{3-2}][P_{2-1}][F_{1-0}]\{\bar{z}_0\}$$

$[P_{2-1}]$ es la matriz adimensional de transferencia para el motor diesel y la masa efectiva de la losa,

$$[P_{2-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.9392 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[F_{3-2}]$ y $[F_{1-0}]$ son matrices de transferencia idénticas para una mitad de la viga

$$[F_{1-0}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [F_{3-2}]$$

Usando multiplicación de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{\Theta}_0 \\ \bar{M}_0 \\ V_0 \end{Bmatrix} = \{\bar{z}_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6.9392 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6.9392 & 6.9392 & 3.4696 & 2.1565 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{\Theta}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{Bmatrix} = \{\bar{z}_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1565 & 3.1565 & 2.5783 & 1.5261 \\ 3.4696 & 4.4696 & 3.7348 & 2.5783 \\ 6.9392 & 6.9392 & 4.4696 & 3.1565 \\ 6.9392 & 6.9392 & 3.4696 & 2.1565 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{\Theta}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{Bmatrix} = \{z_3\}$$

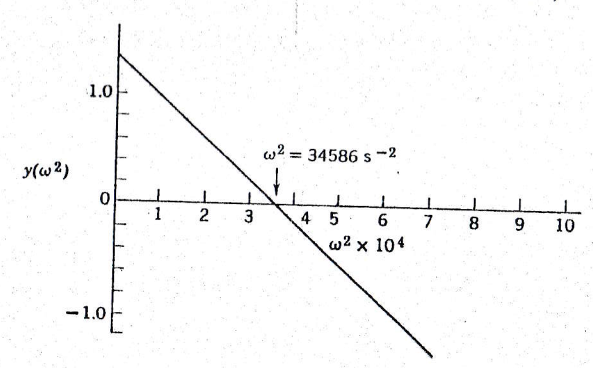
Como $\bar{Y}_3 = \bar{Y}_0 = 0$, y $\Theta_3 = \Theta_0 = 0$ son condiciones de límite, éstas producen la declaración matricial de que

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{Bmatrix}$$

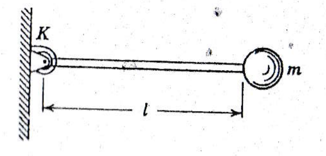
Para que $\omega^2 = 10^4$ sea una frecuencia natrual, $u_{13}u_{24}-u_{23}u_{14} = 0$. Una comprobación rápida de la matriz final muestra

$$u_{13}u_{24} - u_{23}u_{14} = (2.5783)(2.5783) - (3.7348)(1.5261) = 0.9480$$

lo que significa que $\omega^2 = 10^4$ no es una frecuencia natural. Llamando $y(\omega^2) = u_{13}u_{24}-u_{23}u_{14}$, y graficando $y(\omega^2)$ como función de $\omega^2$,



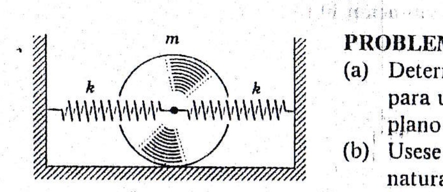

Esta ecuación tiene sólo una raíz, ya que hemos modelado el sistema con sólo una masa. La frecuencia natural es $\omega^2 = 34{,}586\ s^{-2}$, o 1 776 rpm, lo que puede causar cierta dificultad al operar el equipo motor generador.




**PROBLEMA 10.36**
Una barra elástica horizontal, con rigidez contra flexión $EI$, tiene una masa $m$ en un extremo y gira alrededor del otro en un cojinete sin fricción. Un resorte torsional de módulo $K$ soporta a la barra y a la masa en posición horizontal.

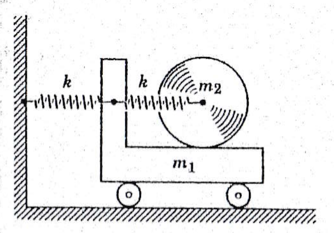


(a) Determínese la matriz de transferencia para el resorte torsional.
(b) Determínese la frecuencia natural del sistema.




**PROBLEMA 10.37**
(a) Determínese la matriz de transferencia de punto para un cilindro que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.
(b) Usese el inciso (a) para encontrar la frecuencia natural del sistema mostrado.

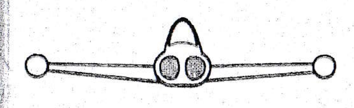
Respuesta: (b) $\omega_n^2 = \dfrac{4k}{3m}$




**PROBLEMA 10.38**
Establézcanse las matrices de punto y transferencia y resuélvase para las dos frecuencias naturales y formas de modo del sistema ($m_2 = m$, $m_1 = 2m$). Nótese que debe encontrarse primero la matriz de transferencia de punto para un cilindro rodante (consúltese el Prob. 10.37).

$$\omega_1^2 = \frac{2}{7}\frac{k}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

**PROBLEMA 10.39**
Se repite el Prob. 10.3, con $k = 2\,000$ N/m y $mg = 2$ kg. Resuélvanse usando matrices extendidas, las amplitudes forzadas de cada masa si la masa inferior se fuerza por $F(t) = 20$ sen $50t$. Nótese que este problema es idéntico al Prob. 10.26.

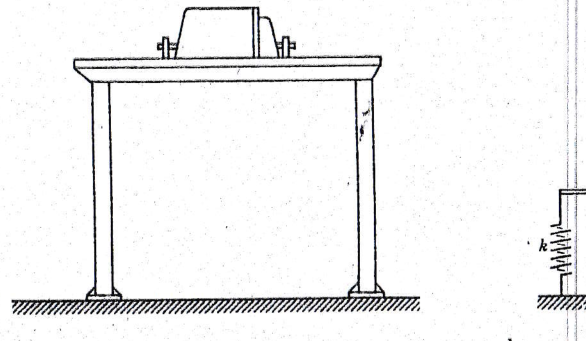


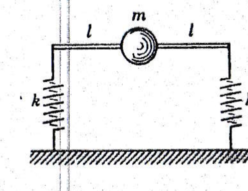
**PROBLEMA 10.40**
El fuselaje de un aeroplano con motor de chorro, tiene una masa de 5 000 kg. La mitad de la longitud de las alas es de 6 m, y se sabe que la rigidez contra flexión de media ala es de $3 \times 10^8$ N·m². Si se transporta combustible adicional en dos tanques de extremo de ala, cada uno de los cuales tiene una masa de 300 kg, determínese el valor de la frecuencia natural de la vibración flexionante, usando iteración de matriz.

Respuesta: $\omega^2 = 93.12\ s^{-2}$

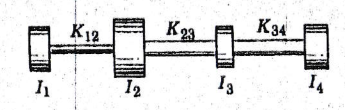
**PROBLEMA 10.41**
Un equipo turbina-generador, se monta sobre una cimentación de acero. Como una primera aproxima-

ción, se puede describir la instalación como una masa concentrada sobre una viga soportada a su vez sobre columnas flexibles. Determínese la frecuencia natural de vibración libre.






Respuesta: $\omega^2 = \dfrac{k}{m\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{kl^3}{EI}\right]}$




**PROBLEMA 10.42**

Para el sistema torsional de cuatro masas mostrado, determínense las frecuencias naturales de vibración torsional, usando vectores de estado y matrices de transferencia. *Indicio:* Como punto de partida supóngase que $\omega^2 = 1\,000\ s^{-2}$.

$I_1 = 200$ kg · m² $\quad K_{12} = 10^5$ N·m/radián
$I_2 = 400$ kg · m² $\quad K_{23} = 3 \times 10^5$ N·m/radián
$I_3 = 100$ kg · m² $\quad K_{34} = 4 \times 10^5$ N·m/radián
$I_4 = 300$ kg · m²

Respuesta: $\omega_1^2 = 805.5\ s^{-2}$
$\omega_2^2 = 1225\ s^{-2}$
$\omega_3^2 = 8100\ s^{-2}$

# ONCE

# SISTEMAS DISTRIBUIDOS

## 11.1 INTRODUCCION

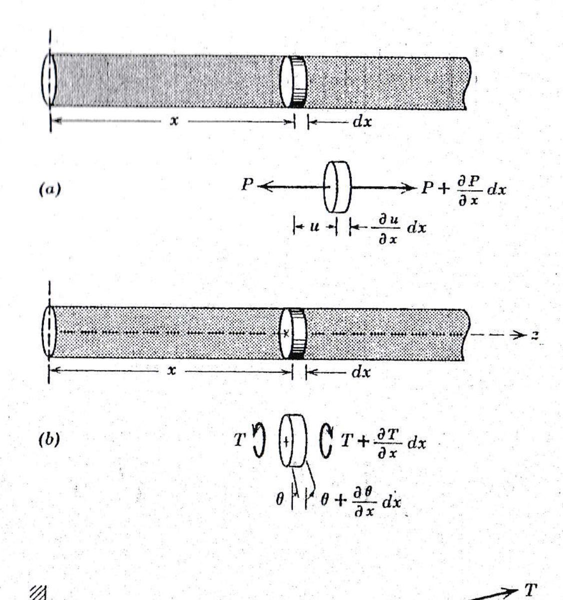
En un sistema discreto, la elasticidad y la masa se modelan como propiedades discretas. Se pueden resolver muchos problemas usando sistemas discretos, pero existen ciertas desventajas, siendo las más obvias que la masa y la elasticidad no siempre se pueden separar en los modelos matemáticos de los sistemas reales. Un método alterno de modelar sería distribuir la elasticidad y la masa. Los sistemas en los que se considera que la elasticidad y la masa son parámetros distribuidos, son *sistemas distribuidos*. Las vigas, barras, flechas, cables y cuerdas se pueden modelar con precisión como sistemas distribuidos.

Son necesarias tres suposiciones para formar un modelo matemático de un sistema distribuido. La primera es que el material debe ser homogéneo; la segunda es que debe ser elástico, lo que significa que sigue la ley de Hooke; y la última es que debe ser isotrópico. Estas suposiciones son restrictivas, pero son necesarias.

Se proporcionarán tres muy buenos ejemplos de sistemas distribuidos. Estos tienen forma matemática idéntica y han sido muy difundidos en los textos, aunque sus aplicaciones prácticas son limitadas.

**Vibración longitudinal de una barra uniforme.** Consideremos la transmisión del esfuerzo longitudinal a lo largo de una barra elástica que tiene un área $A$ de sección transversal uniforme y un módulo elástico $E$. En la Fig. 11.1a, un elemento de sección transversal, que tiene un espesor infinitesimal $dx$, se ha movido una distancia $u$ bajo el esfuerzo elástico debido a la fuerza $P$, desde

**Fig. 11.1**




su posición de equilibrio, $x$, medido a partir de cualquier ordenada arbitraria de longitud. El elemento ha sido estirado también con fatiga elástica, de modo que su anchura ha aumentado en $(\partial u/\partial x)dx = \epsilon_x dx$, $\epsilon_x$ siendo la deformación en la dirección-$x$. Se usa la derivada parcial ya que el desplazamiento $u$ es una función tanto del desplazamiento longitudinal, como del tiempo. Sumando las fuerzas en la dirección-$x$ positiva,

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$$

$$P + \frac{\partial P}{\partial x} dx - P = \frac{\mu}{g} A\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

La aceleración del elemento es $\partial^2 u/\partial t^2$, y $\mu$ es la densidad ponderal de la barra. La fuerza es $P = EA\epsilon_x$. Sustituyendo para $P$ y $\epsilon_x$, y cancelando $dx$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{A\mu}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



Para una barra uniforme, el área y el módulo de elasticidad son constantes. Por tanto,

$$\frac{Eg}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (11.1)$$

La Ec. 11.1 es la ecuación de movimiento para la propagación del esfuerzo longitudinal en una barra longitudinal.

**Vibración torsional de una barra uniforme.** De la misma manera, podemos encontrar la ecuación de movimiento para la transmisión de esfuerzo cortante en una barra longitudinal. Otra vez, el área de la sección transversal es $A$ y es uniforme. El módulo de rigidez en torsión es $G$. En la Fig. 11.1b, un elemento de sección transversal de ha desplazado angularmente en un valor $\theta$ a partir de su posición de equilibrio. El elemento se ha torcido también con deformación elástica una cantidad $\gamma = r(\partial\theta/\partial x)$, en donde $r$ es el módulo de la barra. Sumando los momentos aplicados al elemento $dx$ alrededor del eje geométrico de la barra,

$$\sum \mathbf{M}_z = I\ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = \frac{\mu}{g} J\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

El momento de inercia de masa del elemento delgado alrededor de su eje geométrico, es el producto de la masa por unidad de longitud, y el segundo momento polar de área con respecto al mismo eje. Cancelando $dx$ y reemplazando el par de torsión $T$ por la ecuación elástica,

$$T = GJ\frac{\gamma}{r} = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = \frac{\mu J}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Para una barra uniforme, no varían con $x$ ni el segundo momento polar de área, ni el módulo de rigidez $x$, y

$$\frac{Gg}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (11.2)$$

La Ec. 11.2 es la ecuación de movimiento para la propagación del esfuerzo cortante en una barra longitudinal.

**Vibración transversal de una cuerda o cable.** La vibración lateral de una cuerda o cable tensos, tiene una ecuación de movimiento similar. Considérese una cuerda o cable estirados bajo una tensión $T$ entre dos puntos fijos, como en la

Fig. 11.1c. El cable tiene un peso por unidad de longitud de $w$. Sumando las fuerzas en la dirección-$y$, que es transversal a la cuerda,

$$T\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)-T\operatorname{sen}\theta=\frac{w}{g}dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Usando trigonometría,

$$\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}dx$$

Para pequeños desplazamientos laterales, se puede reemplazar la pendiente de la curvatura por $\partial y/\partial x$

$$T\cos\theta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{gH}{w}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (11.3)$$

Esta es la ecuación de movimiento para una cuerda en vibración.

Si la distancia entre los soportes es tan grande que la cuerda cuelga, cos $\theta$ es diferente de cero, pero $T\cos\theta = H$, la componente horizontal de la tensión en la cuerda. Esta es una constante, lo que se puede verificar con facilidad por simple estadística.

## 11.2 LA ECUACION DE ONDA

Los tres problemas anteriores son matemáticamente idénticos. Todos ellos implican una función $\phi(x, t)$ que se expresa como función de dos variables $x$ y $t$, de acuerdo con la ecuación diferencial parcial de movimiento,

$$c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (11.4)$$

Esta se conoce como la ecuación de onda.

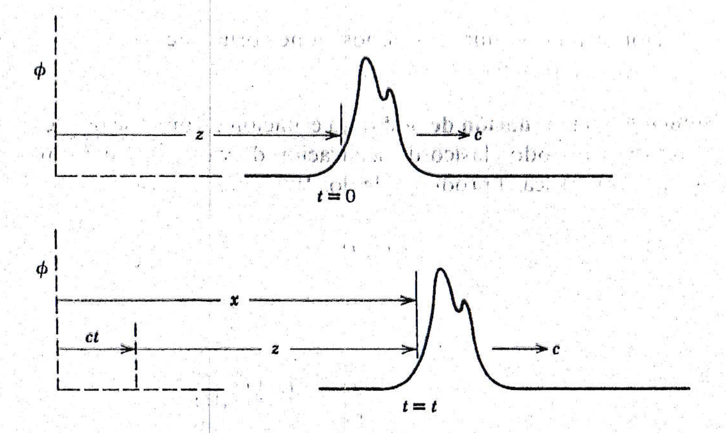
Se le llama la ecuación de onda porque se le puede describir como una onda estacionaria, si usamos un sistema de coordenadas que se mueva con la perturbación. En la Fig. 11.2, una onda viajera se mueve en la dirección $x$ positiva con una velocidad $c$ y una forma que permanece sin cambio mientras viaja. En un sistema de coordenadas que se mueve en la misma dirección, con la onda, y con la misma velocidad $c$, el desplazamiento en el sistema móvil de coordenadas es

$$z = x - ct$$

La perturbación se establece como una función del desplazamiento en el sistema móvil de coordenadas, si $\phi(x, t) = f(z) = f(x - ct)$. Para mostrar que ésta es una solución a la ecuación de onda, tómense las derivadas parciales



**Fig. 11.2**




$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}=c\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{dx}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

Esta es la ecuación de onda en una dimensión. Cualquiera y todas las formas de onda que tienen onda constante en un sistema de coordenadas que se mueven con una velocidad $c$, tendrán esta ecuación de movimiento.

Volviendo a nuestros tres problemas originales, podemos completar las tres velocidades de propagación para ondas viajeras.

Para ondas de esfuerzo longitudinal en una barra horizontal: $c=\sqrt{\frac{Eg}{\mu}}$

Para ondas de esfuerzo cortante en una barra horizontal: $c=\sqrt{\frac{Gg}{\mu}}$ (11.5)

Y para ondas transversales en una cuerda: $c=\sqrt{\frac{Hg}{w}}$

Debe hacerse una observación sutil. Si la propagación de esfuerzo elástico en una barra horizontal implica esfuerzos tanto axial como de corte en la perturbación, las ondas de esfuerzo cortante se retrasarán, distorsionando la forma de onda viajera, o separándose por completo, lo que constituye una

violación a una de nuestras suposiciones originales, que la forma de onda permanecía sin cambio al viajar.

**Soluciones a la ecuación de onda.** La ecuación de onda se puede resolver también por el método clásico de separación de variables, si permitimos que la función $\phi(x, t)$ sea el producto de dos funciones separadas, una de $x$ y una de $t$.

$$\phi(x, t) = f_1(t) f_2(x)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial t^2} f_2(x)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x^2} f_1(t)$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales de movimiento,

$$\frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial t^2} f_2(x) = c^2 \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x^2} f_1(t)$$

Las funciones se pueden separar por división, lo que conduce a la afirmación

$$\frac{1}{f_1(t)} \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{f_2(x)} \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2}$$

Ya que las funciones están separadas, no se necesitan más las derivadas parciales.

El único modo de que dos variables de funciones independientes $x$ y $t$ puedan ser iguales entre sí, es que éstas sean iguales a una constante. La constante es arbitraria y, por razones de conveniencia y previsión, se selecciona la constante como $-\omega_n^2$.

$$\frac{1}{f_1(t)} \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -\omega_n^2$$

$$\frac{c^2}{f_2(x)} \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} = -\omega_n^2$$

Estas conducen a dos ecuaciones diferenciales de movimiento separadas

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \omega_n^2 f_1(t) = 0$$

de lo que,

$$f_1(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \qquad (11.6)$$

y,

$$\frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 f_2(x) = 0$$



de lo que

$$f_2(x) = C \cos \frac{\omega_n}{c} x + D \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{c} x \qquad (11.7)$$

La solución completa para $\phi(x, t)$ es así

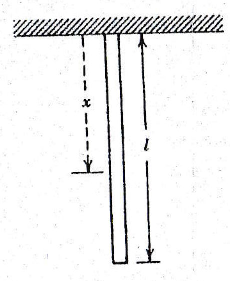
$$\phi(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)\left(C \cos \frac{\omega_n}{c} x + D \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{c} x\right) \qquad (11.8)$$

Existen cuatro constantes arbitrarias, determinadas por las condiciones iniciales y las condiciones de límite.

---

## *PROBLEMA EJEMPLO 11.1*

Determínese el desplazamiento de una sección transversal lateral de una barra uniforme, con un extremo fijo y el otro libre, si la barra vibra longitudinalmente.




***Solución:***
La ecuación de movimiento para el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una sección transversal lateral de una barra uniforme, es

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

De la Ec. 11.8, el desplazamiento $u$ es

$$u(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)\left(C \cos \frac{\omega_n x}{c} + D \operatorname{sen} \frac{\omega_n x}{c}\right)$$

Para una de las condiciones de límite, $u = 0$ en $x = 0$, ya que la barra está empotrada en el extremo fijo

$$0 = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t) C$$

y $C = 0$. Para el extremo libre de la barra, puede no haber fuerza aplicada.

Usando esto como segunda condición de límite, $EA(\partial u/\partial x) = 0$ a $x = l$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t) D \frac{\omega_n}{c} \cos \frac{\omega_n l}{c}$$

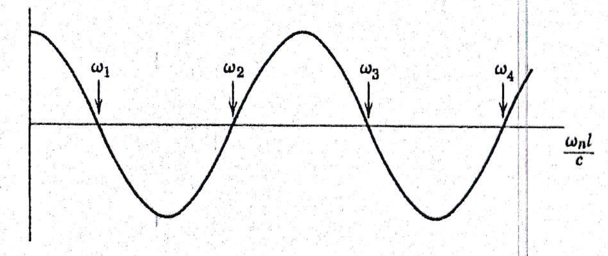
Esto sólo puede ser cierto si

$$\cos \frac{\omega_n l}{c} = 0$$

Esta es la ecuación de frecuencia. Sus raíces son los valores característicos para este problema particular

$$\frac{\omega_n l}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2}, \quad n \text{ siendo impar}$$

$$\frac{\omega_n l}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2}, \quad \text{con } n \text{ sumada}$$




Redisponiendo términos, las frecuencias naturales son

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\mu}}, \quad n \text{ siendo impar}$$

y,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\mu}}$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\mu}}$$

$$\omega_3 = \frac{5\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\mu}}$$

El desplazamiento $u_n$ representa el desplazamiento en un modo principal.

$$u_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t)$$



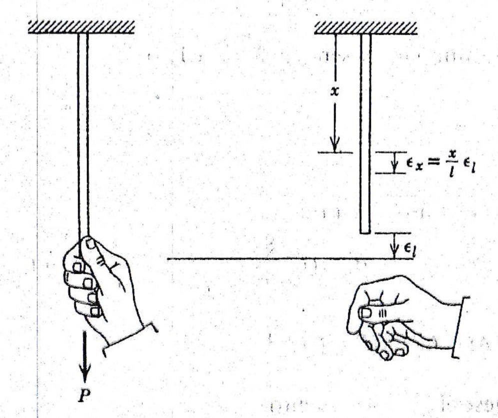
El desplazamiento $u$ exhibirá todos los modos. En consecuencia, el desplazamiento total será la suma

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t)$$

Las constantes arbitrarias $A_n$ y $B_n$ deben determinarse a partir de las condiciones iniciales.

### *PROBLEMA EJEMPLO 11.2*

Una barra uniforme, con un extremo fijo y el otro libre, se estira bajo una carga estática y se libera súbitamente desde el reposo en el momento $t = 0$. A partir de estas condiciones iniciales, determínese el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$.




***Solución:***
En el momento de la liberación súbita de la barra, el desplazamiento longitudinal es linealmente proporcional a la distancia $x$ a partir del extremo fijo de la barra. En el extremo fijo, el desplazamiento $u = 0$. En $x = l$, el desplazamiento $u = \epsilon l$, siendo $\epsilon$ la deformación longitudinal. Una condición de límite es $u = \epsilon x$ cuando $t = 0$, y la otra es que $\dot{u} = 0$ cuando $t = 0$.

El desplazamiento $u(x, t)$ de una barra uniforme vibrando longitudinalmente es

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t)$$

y

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \omega_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l} (B_n \cos \omega_n t - A_n \operatorname{sen} \omega_n t)$$

De la primera condición de límite,

$$\epsilon x = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l}$$

y de la segunda,

$$0 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \omega_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l}$$

Recordando nuestro conocimiento de los coeficientes de Fourier,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \epsilon x \cos \frac{n\pi x}{2l}\, dx$$

$$= \frac{2\epsilon}{l}\left(\frac{2l}{n\pi}\right)^2 \int_0^l \left(\frac{n\pi x}{2l}\right) \cos \frac{n\pi x}{2l}\, d\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)$$

$$= \frac{8\epsilon l}{n^2\pi^2}\left[\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l}\right]_0^l = \frac{8\epsilon l}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Ya que $n$ es impar, el sen $n\pi/2 = \pm 1$, o

$$A_n = \frac{8\epsilon l}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2}$$

y,

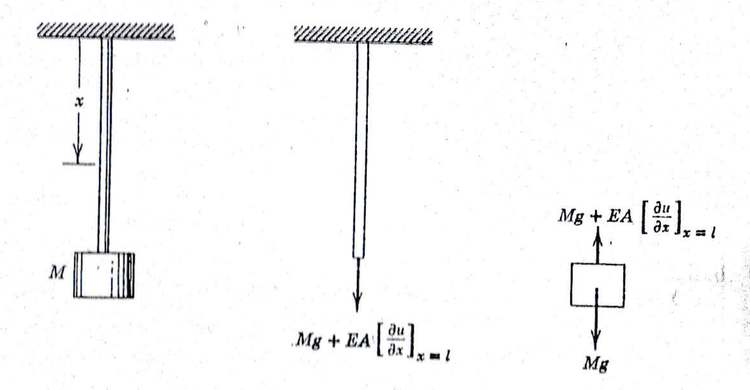
$$B_n = 0$$

El desplazamiento es entonces,

$$u(x, t) = \frac{8\epsilon l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2l} \cos \omega_n t$$

### *PROBLEMA EJEMPLO 11.3*

Determínese el desplazamiento de una sección transversal lateral de una barra uniforme que vibra longitudinalmente, si un extremo está fijo y el otro soporta una masa concentrada $M$.






***Solución:***
La ecuación de movimiento para el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una sección transversal lateral de la barra uniforme, es otra vez

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

y,

$$u(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)\left(C \cos \frac{\omega_n x}{c} + D \operatorname{sen} \frac{\omega_n x}{c}\right)$$

La condición de límite en el extremo fijo de la barra es $u = 0$ en $x = 0$,

$$0 = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)C$$
$$C = 0$$

En el extremo inferior de la barra, ésta ha sido desplazada por la fuerza $mg + EA\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l}$ $EA\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l}$ que es una fuerza elástica que acelera a la masa $m$.

$$-EA\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l} = M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Esta es la segunda condición de límite.

$$-EA(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)\left(D \cos \frac{\omega_n l}{c}\right)\frac{\omega_n}{c}$$

$$= -M(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)\omega_n^2 D \operatorname{sen} \frac{\omega_n l}{c}$$

de lo que,

$$\tan \frac{\omega_n l}{c} = \frac{EA}{M\omega_n c}$$

recordando que $c^2 = \dfrac{Eg}{\mu}$,

$$\frac{\omega_n l}{c} \tan \frac{\omega_n l}{c} = \frac{A\mu l}{Mg}$$

Esta es la ecuación de frecuencia. Sus raíces son los valores característicos para este problema, pero se determinan con menor facilidad porque la ecuación es trascendente.

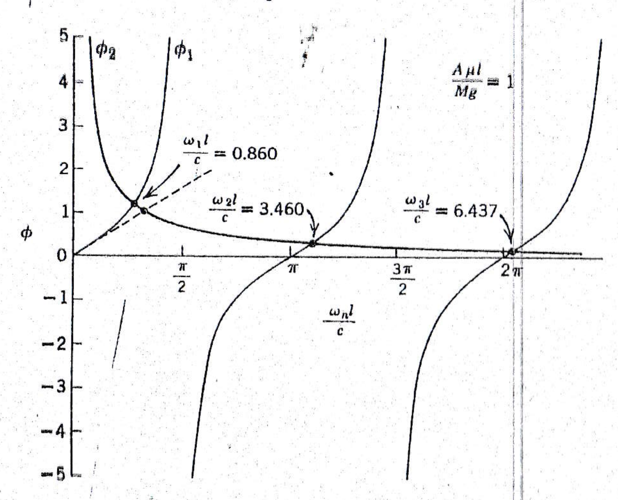
Redisponiendo términos:

$$\tan \frac{\omega_n l}{c} = \frac{A\mu l}{Mg} \frac{c}{\omega_n l}$$

Si hacemos

$$\tan\frac{\omega_n l}{c} = \phi_1 \quad \text{y} \quad \frac{A\mu l}{Mg}\frac{c}{\omega_n l} = \phi_2$$

Esta ecuación transcendente se satisface cuando $\phi_1 = \phi_2$. Graficando ambas como función de $\omega_n l/c$ para $A\mu l = mg$. Las primeras tres raíces son $\omega_1 l/c = 0.860$, $\omega_2 l/c = 3.460$, y $\omega_3 l/c = 6.437$.




Para la primera frecuencia natural, hemos reemplazado $\omega_n l/c$ por $\tan \omega_n l/c$ que es la línea recta interrumpida

$$\frac{\omega_n l}{c} = \frac{A\mu l}{Mg}\frac{c}{\omega_n l}$$

o,

$$\omega_n^2 = \frac{c^2}{l^2}\frac{A\mu l}{Mg} = \frac{Eg}{\mu l^2}\frac{A\mu l}{Mg}$$

$$= \frac{AE}{Ml}$$

Esto es lógico, ya que el módulo efectivo es $k_e = AE/l$.

El error al hacer esta aproximación es de 14%, que no es muy grande considerando nuestra suposición de que la masa de la barra era igual a la masa del peso sujeto a su extremo. Para $A\mu l/mg = 0.1$, $\omega_1 l/c = 0.3113$. Haciendo la misma aproximación, de que $\tan \omega_n l/c = \omega_n l/c$, el error es de sólo 1.5%. En cada caso, la respuesta aproximada resulta en un cálculo más alto de la frecuencia natural, que el del cálculo más correcto. Esto era de esperarse.



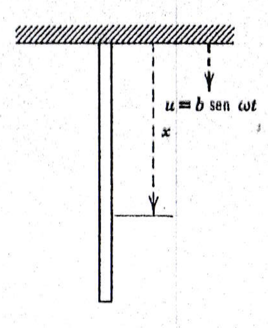
**PROBLEMA 11.4**

Determínese el tiempo que toma a una onda transversal viajar a lo largo de una línea de transmisión, desde una torre a otra, si la componente horizontal de la tensión del cable es de 25 000 N, las torres están separadas 300 m, y el cable tiene una masa de 1.5 kg/m de largo.

Respuesta: 2.32 s

**PROBLEMA 11.5**

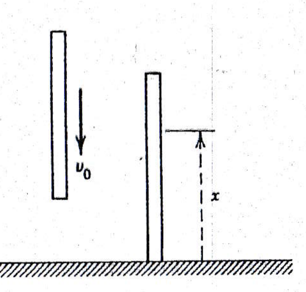
Determínese la velocidad de (a) las ondas longitudinales y (b) las ondas de corte (torsionales) en una barra de acero sólida circular. (Usese $E = 205 \times 10^9$ N/m² y $G = 82.5 \times 10^9$ N/m².)




**PROBLEMA 11.6**

El extremo superior de una barra uniforme de una bomba reciprocante para pozo profundo, recibe un movimiento $u = b$ sen $\omega t$. Descríbanse la vibración de estado estable de la barra, $u(x)$ en términos de la amplitud $b$ en el extremo superior y las frecuencias naturales de la misma. Ignórese el efecto de levantar la columna de fluido en el pozo.

Respuesta: $u = b\left(\cos\frac{\omega x}{c} + \tan\frac{\omega l}{c}\,\text{sen}\frac{\omega x}{c}\right)\text{sen}\,\omega t$




**PROBLEMA 11.7**

Una barra longitudinal hace impacto sobre una superficie rígida y esto provoca una vibración longitudinal en aquélla. Determínese la presión entre la barra y la superficie rígida, mientras la barra permanece en contacto con la superficie, si el impacto ocurre teniendo la barra una velocidad inicial de $v_0$. Grafíquese la variación de fuerza con el tiempo, antes de que ocurra el rebote.

Respuesta: $P = \frac{4EAv_0}{\pi c}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\frac{n\pi c}{2l}t$

## 11.3 VIBRACION TRANSVERSAL DE VIGAS UNIFORMES

La vibración transversal de vigas uniformes es otro problema de vibración en el cual se distribuyen la masa y la elasticidad.

Existen varias aplicaciones muy importantes de este problema. Una es la de las velocidades críticas de flechas y rotores en rotación, y otra es la de vibración transversal de cables suspendidos, tales como los de las líneas de transmisión

En la Fig. 11.3, se ha aislado un elemento delgado de una viga. Al flexionarse la viga en vibraciones transversales, el elemento se moverá hacia atrás y hacia adelante en la dirección-$y$, y también girará muy levemente. Despreciando las propiedades inerciales del elemento en rotación y suponiendo momentos,

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

$$V\,dx = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx$$

o

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

En la dirección-$y$, la suma de fuerzas es

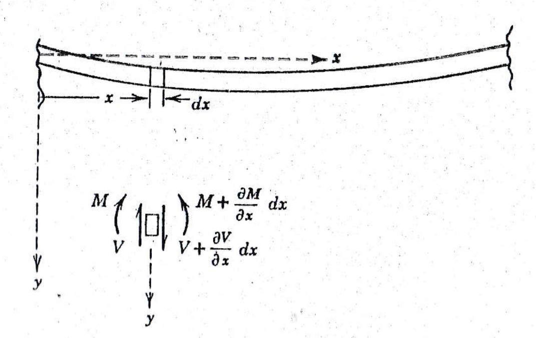
$$\sum \mathbf{F} = dm\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx = \frac{w}{g}\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

o, combinando las dos ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11.9}$$

**Fig. 11.3**






Esta ecuación se parece a la ecuación de onda, pero no lo es. La segunda parcial del momento $M$ con respecto a $x$, es igual a la segunda parcial del desplazamiento $y$ con respecto al tiempo. Se necesita un paso adicional, la representación del momento flexionante en términos del cambio en pendiente.

$$M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Sustituyendo en la Ec. 11.9

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11.10}$$

Si la viga es uniforme, la rigidez contra flexión es constante con el desplazamiento y

$$-EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11.11}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden, pero se resuelve de la misma manera que la ecuación de onda, por separación de variables. Si hacemos que la función $y(x, t)$ sea el producto de dos funciones separadas, una de $x$ y una de $t$,

$$y(x, t) = f_1(t)f_2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2f_1(t)}{dt^2}f_2(x)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4f_2(x)}{dx^4}f_1(t)$$

Sustituyendo en la Ec. 11.11 y separando variables

$$\frac{1}{f_1(t)}\frac{d^2f_1(t)}{dt^2} = -\frac{EIg}{wf_2(x)}\frac{d^4f_2(x)}{dx^4} = -\omega_n^2$$

Para que estas dos funciones ahora independientes sean iguales, deben ser iguales a una constante, convenientemente $-\omega_n^2$. Como antes,

$$\frac{d^2f_1(t)}{dt^2} + \omega_n^2 f_1(t) = 0$$

o,

$$f_1(t) = A\cos\omega_n t + B\,\text{sen}\,\omega_n t \tag{11.12}$$

en forma similar,

$$\frac{d^4f_2(x)}{dx^4} - \frac{w\omega_n^2}{EIg}f_2(x) = 0 \tag{11.13}$$

Esto es diferente, ésta es una ecuación diferencial de cuarto orden. Llamando $\beta^4 = w\omega_n^2/EIg$, la solución es

$$f_2(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \operatorname{senh} \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x$$

La diferenciación verificará que $f_2(x)$ es una solución. La solución completa para $y = (x, t)$ es

$$y(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)(C_1 \cosh \beta x + C_2 \operatorname{senh} \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) \tag{11.14}$$

Para resolver esta ecuación general de la vibración transversal de una viga, necesitaremos dos condiciones iniciales y cuatro condiciones de límite. Con las cuatro condiciones de límite encontraremos también los valores característicos de la ecuación de frecuencia que estarán en términos de ciertos valores específicos de $\beta l$, que es adimensional. Esto es, las frecuencias naturales estarán en términos de $\beta l$.

$$\omega_n = \beta^2 l^2 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}} \tag{11.15}$$

## 11.4 EFECTOS DE ROTACION Y CORTE

En la ecuación de movimiento para la vibración transversal de una viga, se despreciaron las propiedades inerciales de una sección de esta en rotación. Si se hubieran incluido, la ecuación de movimiento en la dirección $\theta$ habría sido

$$\sum \mathbf{M} = \frac{\mu I}{g} dx \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial t^2}$$

$$\left(V + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) + V\frac{dx}{2} - \frac{\partial M}{dx} dx = \frac{\mu I}{g} dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

o,

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\mu I}{g}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

En este caso, $I$ es el segundo momento de área y no el momento de inercia de masa. El símbolo es convencional, pero confusorio.

En la dirección-$y$, la ecuación de movimiento permanecería sin cambio

$$\sum \mathbf{F} = dm \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Combinando y sustituyendo,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \frac{\mu I}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2 \partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11.16}$$

Esta tiene un término adicional más que la simple Ec. 11.11 y este término es una cruz-derivada. Es una corrección a la ecuación más simple, y es de cierta importancia en vigas de secciones profundas.

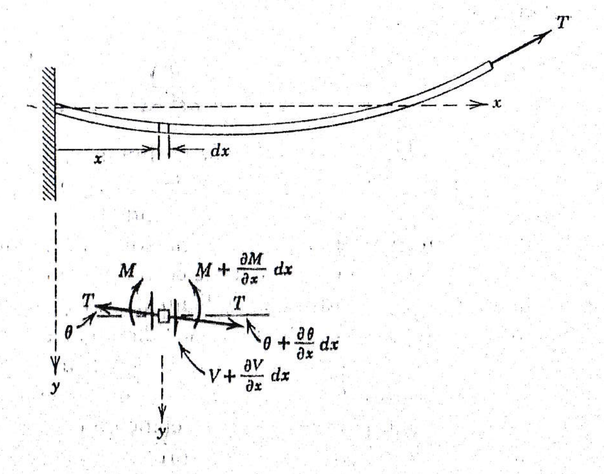
El corte es otro efecto que tiene influencia sobre las ecuaciones de movimiento. En presencia de grandes fuerzas de corte, el elemento de viga es oblicuo. Esto es, no todo el cambio en la pendiente de la viga se debe a la flexión. Parte del cambio se debe a la inclinación debida al corte. Como consecuencia, $M > EI(\partial^2 y/\partial x^2)$. Ello conduce a una muy complicada ecuación de movimiento, que sólo es más precisa en un pequeño porcentaje. En la mayor parte de los casos el aumento de precisión logrado el incluir el corte y la rotación, es mucho menor que lo justificado por los errores de modelado. En general, la corrección para el corte es mayor que la corrección para rotación, pero pueden despreciarse ambos si la longitud de onda es grande en comparación con la profundidad de la sección de viga. Lo que es necesario es, tener en cuenta que estas correcciones existen.

## 11.5 EL EFECTO DE LA CARGA AXIAL

Lord Rayleigh consideró el caso de la vibración de una viga uniforme con carga axial, estableciendo la ecuación de movimiento para la barra, pero sin resolverla. Esencialmente, los cables en vibración y los alambres tensores son ejemplos de este problema. En forma ocasional, el problema ha aparecido en ciertos lugares, pero sus aplicaciones son limitadas. Esta es, no obstante, una variación muy interesante del problema de vibración transversal en vigas uniformes. Se puede encontrar la frecuencia natural de un cable en vibración considerándolo como el equivalente de una cuerda. Pero lo anterior desprecia las propiedades elásticas del cable y la flexión del mismo cerca de los puntos de soporte, que ocasiona fallas. En consecuencia, no se puede ignorar la rigidez contra flexión.

La liberación regular de vértices desde el cable en un viento leve, se acepta por lo general como la causa básica de la vibración de aquél. Sin embargo, existe poca conexión conocida entre esta causa y su efecto final: el daño al cable por fatiga. Básicamente, la causa de la vibración inducida por el viento, o eoliana, es una muy sencilla. Bajo ciertas condiciones, al fluir el aire alrededor de un cable o alambre cilíndrico, el patrón de flujo no es simétrico, sino que se interrumpe con regularidad debido a la formación de vórtices en la parte posterior del cable. Esta disposición asimétrica de flujo altera la distri-

Fig. 11.4




bución de presiones alrededor del cable. Ya que los vórtices o remolinos son áreas de presión reducida, su formación periódica resulta en una diferencial de presión que fuerza alternativamente al cable hacia arriba y hacia abajo. Si esta periodicidad corresponde a una frecuencia resonante, la amplitud de vibración aumentará hasta que la energía impartida al cable por el viento haga juego con la energía disipada por histéresis en el mismo. En esta flexión alternativa del cable, cuando es lo bastante severa, la que produce fatigas en las sujeciones, ojillos y cualquier otra parte en la que un cable o tensor se fatiga en extremo. La vibración simpática de los elementos estructurales puede también producir fatiga en éstos.

Haciendo referencia a la Fig. 11.4, un pequeño elemento del cable, $dx$, se encuentra sometido a fuerzas de tensión, corte y a momentos flexionantes. Estas fuerzas no equilibradas causan la aceleración del elemento de cable en la dirección vertical. La ecuación de movimiento del cable en vibración es

$$\sum \mathbf{F} = \frac{w}{g}\, dx \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx = \frac{w}{g}\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Usando las relaciones generales para la deflexión, corte y momento flexionante, otra vez, la forma final de la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden.

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (11.17)$$

Otra vez, se puede tener la solución de la Ec. 11.17 por el método clásico



de separación de variables. Si se puede escribir la solución como el producto de dos funciones separadas que dependen en forma individual de $x$ y de $t$, éstas se pueden expresar como

$$y(x, t) = f_1(t) f_2(x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial t^2} f_2(x), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x^2} f_1(t), \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 f_2(x)}{\partial x^4} f_1(t)$$

Las ecuaciones diferenciales componentes son

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \omega_n^2 f_1(t) = 0 \qquad (11.18)$$

$$EI \frac{d^4 f_2(x)}{dx^2} - H \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} - \frac{w}{g} \omega_n^2 f_2(x) = 0 \qquad (11.19)$$

Por supuesto, la solución tiempo-dependiente es

$$f_1(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t$$

Usando la sustitución exponencial acostumbrada, $x = Ce^{rt}$ en la solución tiempo tiempo-independiente, se obtiene la ecuación característica,

$$r^4 - \frac{H}{EI} r^2 - \frac{w\omega_n^2}{EIg} = 0$$

Llamando $k$ y $\lambda$ a las raíces cuadráticas de la ecuación característica,

$$\left.\begin{aligned} \kappa^2 &= \left[\frac{H^2}{4(EI)^2} + \frac{w\omega_n^2}{g(EI)^2}\right]^{1/2} + \frac{H}{2EI} \\ \lambda^2 &= \left[\frac{H^2}{4(EI)^2} + \frac{w\omega_n^2}{g(EI)^2}\right]^{1/2} - \frac{H}{2EI} \end{aligned}\right\} \qquad (11.20)$$

La solución se puede expresar tanto en forma exponencial como de funciones circulares o hiperbólicas. Ya que hemos usado antes funciones circulares e hiperbólicas, no es muy difícil demostrar que $f_2(x)$ es una solución, si

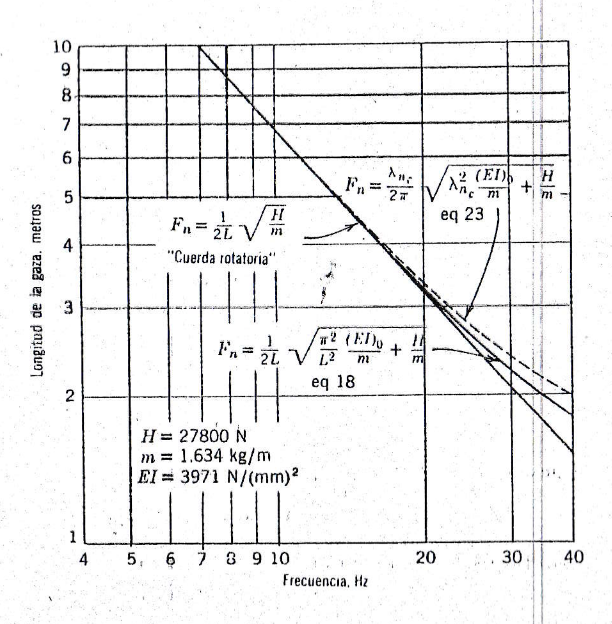
$$f_2(x) = C_1 \cosh \kappa x + C_2 \operatorname{senh} \kappa x + C_3 \cos \lambda x + C_4 \operatorname{sen} \lambda x \qquad (11.21)$$

Las constantes arbitrarias $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$, se determinan por satisfacción de las condiciones de límite apropiadas.

Para una viga simplemente soportada, las condiciones de límite para extremos articulados son tales que el desplazamiento vertical y el momento flexionante valen ambos cero todo el tiempo. La imposición de las condiciones de límite conducirá a la ecuación de frecuencia, a partir de la cual las frecuencias naturales son

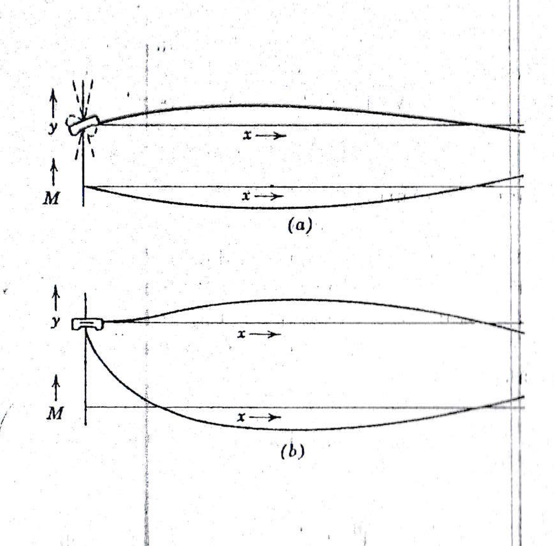
$$\omega_n^2 = \lambda^2 \left[\lambda^2 \left(\frac{EIg}{w}\right) + \frac{Hg}{w}\right] \qquad (11.22)$$

**Fig. 11.5**




el término $\lambda$ deberá encontrarse a partir de la solución de la ecuación de frecuencia. Despreciando la rigidez contra flexión, la ecuación de frecuencia degenerará al caso normalizado de la cuerda vibrante. Despreciando la tensión axial, la ecuación degenerará, al familiar caso de la viga uniforme simplemente soportada. En la Fig. 11.5, se ha hecho una comparación de frecuencias y longitudes de gaza entre el caso de la cuerda vibrante y un cable típico. Por condiciones de extremo, uno está simplemente soportado, y el otro está suje-

**Fig. 11.6**



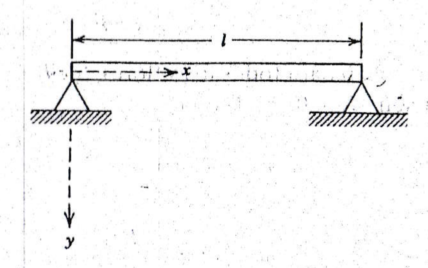



to. En ambos casos, la adición de la rigidez contra flexión eleva la frecuencia natural.

La Fig. 11.6 muestra cuantitativamente las formas que tendrían los diagramas de deflexión y momento flexionante para las condiciones de límite impuestas de sujeción y articulación. Nótese que, en contraste con el caso de la gaza articulada (a), se hace aparente un alto momento flexionante para el caso de extremos sujetos (b). El momento flexionante, que alterna entre un máximo negativo y un máximo positivo, durante la resonancia, es la causa principal de la falla por fatiga de los hilos del cable.

## PROBLEMA EJEMPLO 11.8

Determínese la frecuencia natural de la vibración lateral de una viga uniforme simplemente soportada.




***Solución:***

La deflexión $y(x, t)$ se describe por la ecuación

$$y(x,t) = (A\cos\omega_n t + B\,\text{sen}\,\omega_n t) \times (C_1\cosh\beta x + C_2\,\text{senh}\,\beta x + C_3\cos\beta x + C_4\,\text{sen}\,\beta x)$$

Las condiciones de límite son las mismas en $x = 0$ y $x = l$; la deflexión y el momento flexionante valen ambos cero. Usando estas condiciones, en $x = 0$,

$$y(0,t) = 0 = (A\cos\omega_n t + B\,\text{sen}\,\omega_n t) \times (C_1\overset{1}{\cosh\beta x} + C_2\overset{0}{\text{senh}\,\beta x} + C_3\overset{1}{\cos\beta x} + C_4\overset{0}{\text{sen}\,\beta x})$$

$$0 = C_1 + C_3$$

$$M = -EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 = -EI\beta^4(A\cos\omega_n t + \beta\,\text{sen}\,\omega_n t) \times (C_1\overset{1}{\cosh\beta x} + C_2\overset{0}{\text{senh}\,\beta x} - C_3\overset{1}{\cos\beta x} - C_4\overset{0}{\text{sen}\,\beta x})$$

$$0 = C_1 - C_3$$

Por tanto, $C_1 = C_3 = 0$. En $x = l$

$$y(l, t) = 0 = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)(C_2 \operatorname{senh} \beta l + C_4 \operatorname{sen} \beta l)$$

y

$$M(l, t) = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$= -EI\beta^2(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)(C_2 \operatorname{senh} \beta l - C_4 \operatorname{sen} \beta l)$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{senh} \beta l & \operatorname{sen} \beta l \\ \operatorname{senh} \beta l & -\operatorname{sen} \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No considerando la solución trivial $C_2 = C_4 = 0$, y haciendo el determinante igual a cero, se tiene la ecuación de frecuencia

$$2 \operatorname{senh}^2 \beta l \operatorname{sen} \beta l = 0$$

Ya que el sen h $\beta l > 0$ para todos los valores de $\beta l \neq 0$, las únicas raíces para esta ecuación son $\beta l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, h\pi$

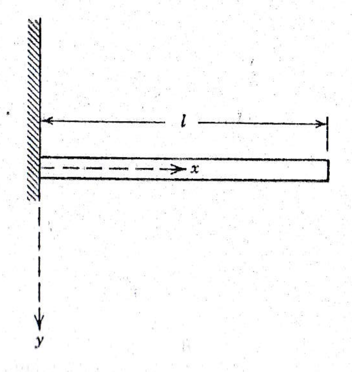
$$\omega_n^2 = \beta^4 l^4 \frac{EIg}{wl^4} = n^4 \pi^4 \frac{EIg}{wl^4}$$

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}$$

en donde $n$ es el entero que indica la armónica.

## *PROBLEMA EJEMPLO 11.9*

Determínese la frecuencia natural de la vibración lateral de una viga uniforme en voladizo.






***Solución:***

La deflexión será la misma que para una viga simplemente soportada.

$$y(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times (C_1 \cosh \beta x + C_2 \operatorname{senh} \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x)$$

Las constantes arbitrarias $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ serán diferentes, ya que las condiciones de límite son diferentes. En el extremo empotrado, $y = 0$ y $dy/dx = 0$. En el extremo libre, tanto el momento flexionante como la fuerza cortante valen cero. En $x = 0$

$$y(0, t) = 0 = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times (C_1 \cosh \beta x + C_2 \operatorname{senh} \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x)$$
$$0 = C_1 + C_3$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(0, t) = 0 = \beta(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times (C_1 \operatorname{senh} \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \operatorname{sen} \beta x + C_4 \cos \beta x)$$
$$0 = C_2 + C_4$$

Reescribiendo la deflexión, sustituyendo $C_3 = C_1$ y $C_4 = -C_2$

$$y = (A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times [C_1(\cosh \beta x - \cos \beta x) + C_2(\operatorname{senh} \beta x - \operatorname{sen} \beta x)]$$

Imponiendo las condiciones de límite en $x = l$,

$$M = -EI\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 0 = -EI\beta^2(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times [C_1(\cosh \beta l + \cos \beta l) + C_2(\operatorname{senh} \beta l + \operatorname{sen} \beta l)]$$

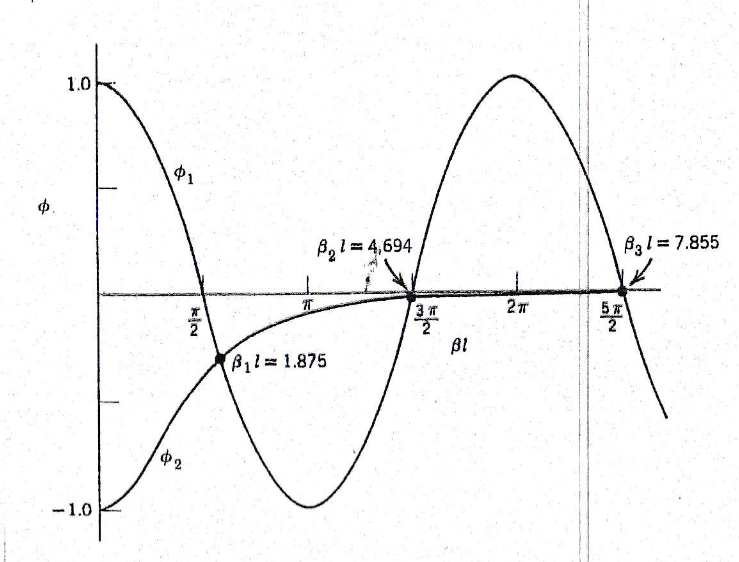
$$V = -EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 = -EI\beta^3(A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t)$$
$$\times [C_1(\operatorname{senh} \beta l - \operatorname{sen} \beta l) + C_2(\cosh \beta l + \cos \beta l)]$$

Estas ecuaciones se pueden resumir

$$\begin{bmatrix} (\cosh \beta l + \cos \beta l) & (\operatorname{senh} \beta l + \operatorname{sen} \beta l) \\ (\operatorname{senh} \beta l - \operatorname{sen} \beta l) & (\cosh \beta l + \cos \beta l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0$$

lo que conduce a la ecuación de frecuencia

$$\cosh \beta l \cos \beta l = -1$$




Esta es también una ecuación trascendente. Si hacemos $\cos \beta l = \phi$ y $-1/\cosh \beta l = \phi$, se satisface la ecuación en $\phi_1 = \phi_2$. De las intersecciones,

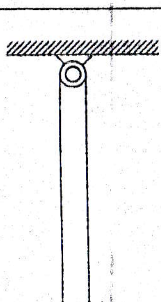
$$\beta_1 l = 1.875, \quad \beta_2 l = 4.694, \quad \beta_3 l = 7.855, \quad \beta_4 l = 10.996, \quad \beta_5 l = 14.137$$

Para modos más altos,

$$\beta_n l = \frac{(2n-1)}{2} \pi$$

Sustituyendo el valor apropiado para $\beta l$, se obtendrá la frecuencia natural

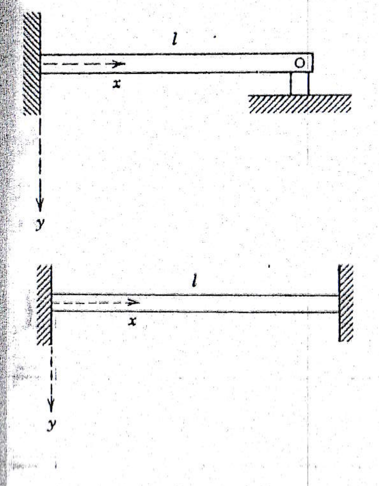
$$\omega_n = \beta^2 l^2 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}$$



**PROBLEMA 11.10**

Determínese una expresión para las frecuencias naturales de la vibración lateral de la viga uniforme suspendida como péndulo.






**PROBLEMA 11.11**

Determínese una expresión para las frecuencias naturales de una barra empotrada y empernada, en vibración lateral.

Respuesta: $\tan nl = \tanh nl$

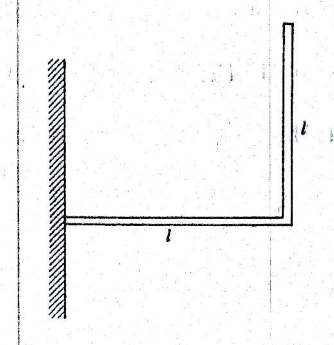
**PROBLEMA 11.12**

Determínese la expresión para las frecuencias naturales de la vibración lateral de una viga uniforme, empotrada en ambos extremos.

Respuesta: $\cos \beta l \cosh \beta l = 1$

**PROBLEMA 11.13**

Una plataforma consiste de dos vigas I empotradas en sus extremos. Las vigas son de sección normalizada con profundidad de 114.25 mm, longitud de 1.525 m, área de sección transversal de 3 852(mm)$^2$, momento de inercia $25.05 \times 10^6$ (mm)$^4$. $E$ vale $205 \times 10^9$ N/m$^2$. La masa de estas vigas es de 30.5 kg/m. Una carga uniformemente distribuida de 14 235 N constituye el piso de la plataforma. ¿Cuáles son las dos primeras frecuencias naturales de la estructura?




**PROBLEMA 11.14**

Un marco consiste de una barra uniforme fija en ángulo recto a otra barra que está empotrada en la pared. Determínense las frecuencias naturales del marco.

# REFERENCIAS

Existen muchos buenos libros sobre el tema de las vibraciones mecánicas. En lugar de listarlos todos, lo que no podría hacer, y que sería de dudosa utilidad, recomiendo siete, considerando que éstos son los mejores.


1. *Vibration Problems in Engineering,* S. Timoshenko, D. Van Nostrand, 3a. Edición, 1955.
2. *Mechanical Vibration,* J. P. Den Hartng, McGraw-Hill, 1956, 4a. Edición.
3. *Engineering Vibrations,* L. S. Jacobsen y R. S. Ayre, McGraw-Hill, 1958.
4. *The Mechanics of Vibration,* R. F. D. Bishop y D. C. Johnson, Cambridge University Press, 1960.
5. *Theory of Vibrations and Applications,* W. T. Thomson, Prentice-Hall, 1972.
6. *Shock and Vibration Handbook,* C. M. Harris y C. E. Crede, McGraw-Hill, 1961.
7. *Elements of Vibration Analysis,* L. Meirovitch, McGraw-Hill, 1975.


APENDICE

# TRANSFORMADAS DE LAPLACE UTILES

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-bt}\operatorname{sen} at) = \frac{a}{[(s+b)^2+a^2]}$$

$$\mathcal{L}(e^{-bt}\cos at) = \frac{s+b}{[(s+b)^2+a^2]}$$

$$\mathcal{L}(te^{-at}) = \frac{2}{(s+a)^2}$$

$$\mathcal{L}(t\operatorname{sen} at) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t\cos at) = \frac{(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f(t))\right] = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}(f(t))\right] = s^2F(s) - sf(0^+) - \frac{df}{dt}(0^+)$$

# INDICE ALFABETICO

ESTA IMPRESION DE 1 000 EJEMPLARES
SE TERMINO EN MARZO DE 1991,
EN LOS TALLERES DE LYCSA IMPRESORES,
NAUTLA 150-2, COL. CASA BLANCA,
MEXICO, D.F.